

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Directores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

BUCHANAN, C. A.: A Program of Physical Research in Classical Mechanics	79
EGGER, H.: Knickung gerader Stäbe unter Torsion	96
ODI, F.: Zur Theorie des Magnetronverstärkers	119
ELZMANN, F.: Wärmespannungen und -deformationen im elastischen Körper bei ebener stationärer Wärmeströmung	129
DEH, L.: On the Theory of Filtration of Signals	149

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

TSCHULET, E., und STRIEBEL, H. R.: Nomogramm zur Bestimmung der reellen und komplexen Wurzeln einer Gleichung vierten Grades	156
--	-----

Varia - Miscellaneous - Divers

ion internationale de Physique pure et appliquée	159
ternational Symposium on the Reactivity of Solids	160
chbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	160

Z A M P	Vol. III	Fasc. 2	Pag. 79-164	15. 3. 52
---------	----------	---------	-------------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction se adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 34.-, Ausland Fr. 40.-, Einzelnummer Fr. 8.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 34.-, foreign Fr. 40.-, single copy Fr. 8.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 34.-, étranger Fr. 40.-, le numéro Fr. 8.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{3}{4}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1952 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

A Program of Physical Research in Classical Mechanics

By CLIFFORD A. TRUESDELL, Bloomington, Indiana¹)

By "classical mechanics" I mean that range in theory and experiment of motion of material bodies which is governed by the classical forms of the mass, momentum, and energy principles. The too common opinion that the physics of this subject is totally understood rests upon a misconception that classical mechanics is the science of mass-points obeying the Hamiltonian equations. In fact it is not mass-point mechanics, but *continuum mechanics*, which contains the basic expression of the classical ideas. The mass-point theory is insufficiently physical: on the one hand, really small physical matter (electrons, protons, etc.) fails to obey its postulates even as a first approximation, while, on the other, the behavior of large physical masses (rubber balls, gas spheres, rivers, etc.) is described but incompletely by the mass-point equations, which apply strictly only to the motion of their centres of mass. The gross phenomena observable in macroscopic bodies under ordinary conditions satisfy the classical mass and momentum laws without sensible error, whether these be applied to the whole body or to any of its *macroscopic* portions.

A relic of the last century's views is the common careless claim that the behavior of gross matter can be predicted from the mass-point equations if the intermolecular forces be known. If referred to the Newtonian mass-point equations, this claim is simply false, since the ultimate particles do not obey them; if referred to the quantum-mechanical equations, it is on the one hand evidence that classical mechanics is continuum mechanics, since the classical conservation principles hold for finite portions of matter even though not holding for the elementary particles, but, on the other hand, to attempt to describe the flow of rivers or the spring of rubber in terms of the quantum mechanics of the molecules would lead to useless and indeed illusory complications. Continuum mechanics is a physically realistic discipline: when a physical mass approximates the mathematical concept of a continuous body, its behavior is correctly predicted by the mathematical equations, and the theory begins to fail only when applied to phenomena in which account has to be taken of the individual molecules, which it completely overlooks.

Since classical mechanics is a theory physically adequate only for gross phenomena, its basic laws or axioms should be expressed in terms of *bodies of finite volume*. From some text books one might gain the impression that it is

¹) Graduate Institute for Applied Mathematics, Indiana University. This paper was written for the Applied Mathematics Branch, Mechanics Division, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C.

possible to deduce the laws of continuum mechanics from the mass-point equations. This view is false¹⁾: continuum mechanics is in fact a more general theory than mass-point mechanics. From continuum mechanics it may be shown that the mass-point equations are satisfied by the centre of mass of any finite body, and hence mass-point mechanics is an approximate theory appropriate to the rather degenerate case when the motion of a body about and relative to its centre of mass may be neglected.

The realization that the axioms of classical mechanics should be phrased in terms of continuous media rather than mass-points is not new. At the suggestion of FELIX KLEIN, such a formulation was constructed long ago by HAMEL. In this more general theory it is not force, but *stress*, which is of principal importance²⁾.

This notion once achieved, we may use the degenerate case of mass-point mechanics to point the way. The mass-point equations $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$, $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ are by themselves insufficient to solve any particular problem; to obtain a determinate situation we usually specify *the nature of the forces*. Each particular set of forces defines an *ideal system*: heavy particle, harmonic oscillator, etc., an ideal system intended to represent certain physical bodies. In general classical mechanics the momentum principle was shown by CAUCHY to assume the form

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_c, \quad (1)$$

¹⁾ It is commonly presented in one of two ways:

(a) Let dV be a "volume element" large enough to contain a very great number of elementary particles, but small enough to be regarded as infinitesimal. Then the density ρ at dV is the ratio mass/volume. If \mathcal{F} be the net force per unit volume acting on dV , by regarding ρdV as a mass-point we have $m \mathbf{a} = \rho \mathbf{a} dV = \mathcal{F} dV = \mathbf{f}$, so that $\rho \mathbf{a} = \mathcal{F}$.

(b) Let dV be an ordinary mathematical volume element, which can rigorously approach zero, and suppose a continuous density ρ exists. Then if we can regard the mass-point laws as applying equally to mathematical volume elements, we have $\rho \mathbf{a} dV = \mathcal{F} dV$.

The first viewpoint involves obvious logical and physical contradictions, and must be regarded as purely heuristic: if dV do not approach zero it cannot be identified with an integrand and ρ is not a well-defined quantity; if dV do approach zero it cannot contain a large number of elementary particles, but if it do not contain a large number of these particles it cannot definitely be said to contain or not to contain any particles at all, but only to have a probability of containing a certain number of particles, and, further, quantum effects prevent us from using $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$ in any case. In fact, the first viewpoint is simply contradictory both to common sense and to the now accepted view of the constitution of matter. The second viewpoint, which is that of EULER and CAUCHY, does not derive continuum mechanics at all: rather, it postulates the laws of continuum mechanics as plausible analogues of the mass-point equations.

²⁾ In this way classical mechanics becomes a proper first approximation to relativistic mechanics. Cf. M. VON LAUE, *Die Relativitätstheorie*, vol. I, 3rd ed. (F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1919), § 26: «Sodann aber ist das übliche anschauliche Verfahren, die Dynamik der Kontinua auf die des Massenpunktes zurückzuführen, schon in der Newtonschen Mechanik schweren axiomatischen Bedenken ausgesetzt, während umgekehrt der Grenzübergang vom Kontinuum zum Massenpunkt durchaus einwandfrei ist. Alle diese Bedenken würden sich auch auf die Relativitätstheorie übertragen, ja sie werden hier sogar erheblich verstärkt; es ist nämlich überhaupt nicht möglich, jenes Verfahren einzuschlagen. Denn die Newtonsche Mechanik gilt wohl für den Massenpunkt im Grenzfalle $q = 0$, für das Kontinuum aber wäre diese Aussage im allgemeinen falsch.» (This passage does not occur in the first edition.)

where \mathbf{T} is the stress matrix, \mathbf{T}_c is its conjugate, ρ is the density, and \mathbf{F} is the extraneous force field. These equations, like $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$ and $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, are also quite insufficient for the solution of any particular problem. In first presenting the basic equations (1) CAUCHY¹⁾ remarked that to obtain a determinate system we must know in addition *the nature of the stress*. Each specification of \mathbf{T} defines an *ideal material*, designed to represent certain physical materials. The best known ideal materials are the perfect fluid, the linear viscous fluid, and the linear elastic solid.

Within classical mechanics in this general sense occur two subjects of intensive current research: plastic deformation and turbulent flow. In this note I wish to point out that also the fields of purely elastic and purely viscous behavior still offer challenges to the physicist. Elsewhere I shall give a detailed mathematical treatment and bibliography. Here I wish to emphasize rather the physical principles and the physical novelties. So as to smooth the path of the reader not familiar with the theory of continuous media and the techniques of tensor analysis which are virtual prerequisites for modern mechanics, I shall oversimplify, begging therefore the indulgence of the specialist, for whom this paper is not designed. I hope that what little I can present, however, will encourage the reader to question the all too common assumption that because physical matter is composed of molecules, a theory based on the crudest and most unrealistic molecular hypothesis is automatically preferable to any continuum theory. Indeed, I contend that gross phenomena are most naturally, accurately, and elegantly represented by gross hypotheses alone.

Going back to the most primitive physical concept of elasticity, we say that if a wire be extended then its longitudinal stress σ is proportional to its longitudinal strain e according to Hooke's law:

$$\sigma = E e, \quad (2)$$

where E is a constant. If a wire be twisted there is a similar Hooke's law,

$$\tau = \eta \gamma, \quad (3)$$

relating the shearing stress τ to the shearing strain or angle of twist γ . For fluids a proposal of NEWTON leads to an equation of form (3), with γ to be interpreted as the rate of shearing. These two laws are easily generalized to

¹⁾ A. CAUCHY, *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*, Bull. Soc. Philomath. Paris 1823, pp. 9-13:

«Mais, dans le cas général, ces équations renferment six fonctions inconnues [the stresses] des coordonnées x, y, z . Il reste à déterminer les valeurs de ces six inconnues; mais la solution de ce dernier problème varie suivant la nature du corps et son élasticité plus ou moins parfaite.»

Cf. R. VON MISES, *Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua*, Proc. 3rd int. Congr. appl. Mech., Stockholm, 2, 1-9 (1930).

yield the classical equations of elasticity:

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{E}_s \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{E}, \quad (4)$$

and of fluid dynamics:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + \lambda \mathbf{D}_s \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{D}. \quad (5)$$

In the former, \mathbf{E} is the infinitesimal strain matrix and \mathbf{E}_s is its scalar or trace, while in the latter p is the pressure, $\mathbf{1}$ is the unit matrix, \mathbf{D} is the rate of deformation tensor, and \mathbf{D}_s is its trace; the quantities λ and μ , functions of the thermodynamic state, in (4) are of dimension $\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}$, and in (5) are of dimension $\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1}$. The two laws (4) and (5) are then commonly said to be founded upon experiments.

What experiments? Perhaps HOOKE deduced (2) from experiments, but there is no evidence that NEWTON's proposal was anything more than a "hypothesis", as he indeed called it. The general equations (4) and (5) were discovered by theory alone. NAVIER and POISSON employed the concept of a body as system of mass-points obeying a hypothetical force law, now known to be wrong. CAUCHY gave both molecular and continuum derivations. STOKES used rough molecular arguments to reach a linear rather than a more complicated result by continuum methods. In none of the original treatments is there any suggestion that the basic laws are established by *experiments*; rather, they are derived from plausible hypotheses drawn out of common *experience*¹). In all but STOKES' there is explicit statement that the linear relation is only a first approximation. The founders of these subjects required no experiments to tell them that a linear function is often a good approximation for a more elaborate one in a narrow range, and that the consequences of a linear relation are thus worth exploring, but to be regarded as tentative only. The brazen but completely vague reference to experimental evidence in a typical text book is to be compared with the cautious hypothesis or approximation of the pioneer. Appeal to experiment to shore up unfounded or overwrought theory is a vacant ritual, as when a pious murderer recites a brief prayer for divine protection before cutting his victim's throat.

What experiments? It is common experience that if a steel rod be pulled or twisted, the linear relations (2) and (3) are valid only for very small strains. For steel and most structural materials, however, yield or rupture occurs also

¹) The work of EULER and CAUCHY in mechanics is sometimes deprecated in physical treatments by the label "mathematics". As a single specimen of the type of thinking which led to the major discoveries in continuum mechanics the following passage from STOKES, the most "physical" of the pioneers, may be quoted: "Are we then to suppose that when a solid is constrained it has no *tendency* to relieve itself from the state of constraint, in consequence of its molecules *tending towards* new relative positions, provided the amount of constraint be very small? It appears to me to be much more natural to suppose *a priori* that there should be some such tendency." From § III of *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 8, 287-319 (1844-9) = *Papers*, vol. 1, p. 75-129.

for very small strains, so that (2) and (3) describe adequately what purely elastic behavior there is. If the experiment be performed upon a long wire, however, then purely elastic twisting through one or more revolutions is possible, but does not obey the linear relation (3). There is an easy answer: "retain the non-linear terms", i. e.¹⁾.

$$\tau = \eta \gamma + \eta' \gamma^3 + \dots, \quad (6)$$

or possibly employ more complicated functions of γ . This sort of curve-fitting is the subject of hundreds of semi-empirical papers. The linear relation (3) is then valid for small strains: $\gamma \ll 1$. In fluid dynamics the situation is similar, and the rheological literature abounds in formulae like (6). We cannot say, however, that the linear relation (3) is valid for "small rates of deformation", since rate of deformation is not dimensionless and thus in any given motion may be given any numerical magnitude whatever simply by choice of the unit of time. The range of validity of the linear approximation in fluid dynamics cannot be settled without dimensional considerations. Twenty years ago BATEMAN warned us that existing "experimental tests" concerned degenerate situations (as in a viscometer) and served merely to verify the interconnections of certain dimensionless parameters, thus failing entirely to discriminate between the classical laws of viscosity and the myriad other possible laws which would give rise to the same dimensionless parameters in the same degenerate situations.

The equations (2) and (3) are scalar in character, while both stress and strain are square matrices. If we approach the situations of simple extension and simple shearing through the full matrix equations (4) and (5) we find that the equations (2) and (3) are exact in the classical theories, but for (3) we obtain also the following additional information: *in the classical theories, a shearing strain (or rate of shearing) can be maintained by shearing stresses only.* That is, in a shearing experiment, *both* the stress and the strain matrix are proportional to the matrix

$$\boldsymbol{\tau} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

where τ is a measure of the amount of shear. Now it is at this very point that the one-dimensional approach indicated by (6) fails completely to reveal the

¹⁾ Here and subsequently, so as to avoid confusing the reader who is not familiar with finite elasticity theory we gloss over the distinction between a shearing displacement and a shearing strain. Since the strain is a quadratic function of the displacement gradients, nonlinearity occurs in elasticity at two different levels: in the expression for the strain, and in the stress-strain relations. Both these nonlinearities give rise to Kelvin and Poynting effects and may be described in general terms (though with quantitative differences) by our discussion further on.

physics of the situation, for the researches of the curve-fitting type based upon (6) or analogous expressions presuppose *without any justification whatever* that in the nonlinear theory also shearing stresses alone are sufficient to maintain shearing strains or rates of shearing.

What of the experiments? If the experiment be set up so as to measure only the effect predicted by the classical theory, obviously enough only the classical effect will be measured. All but a very, very few of the experiments allegedly testing the classical laws of elasticity and viscosity may thus be discarded as irrelevant. Indeed, to the best of my knowledge there are only four experiments prior to 1950 which give any pertinent information on this subject.

The first was conceived and executed by POYNTING in 1909 to 1912. A steel wire when twisted was found to *increase in volume in proportion to the square of the angle of twist*. This effect, totally impossible within the classical linear theory, had been predicted theoretically by KELVIN in 1883. REYNOLDS, who had discovered it independently, had called it *dilatancy*, "a definite change of bulk, consequent on a definite change of shape". REYNOLDS illustrated this phenomenon by a model composed of rigid spheres packed together: "In walking over wet sands the gloss disappears and the sand appears to dry out wherever the foot is placed." Stating incorrectly that continuum methods could not predict this phenomenon, REYNOLDS regarded it as evidence that physical bodies are composed of small particles, and he spent many years in constructing a theory of matter, *The Sub-Mechanics of the Universe*, based upon this model, one of the many molecular speculations whose dry bones litter the by-paths of physics.

In the first Poynting experiment a change of length was observed along with the change of volume. This change of length also is impossible within the classical linear theory. In order to separate these two effects, in 1913 POYNTING repeated the experiment, employing this time a rubber cord instead of a steel wire. Rubber is an ideal medium for elastic studies because its perfectly elastic range is enormous and its virtual incompressibility simplifies the theory. With the rubber cord POYNTING found that the change of volume was less than the experimental error, but now there was a much more noticeable *change of length proportional to the square of the angle of twist*. In both the experiments the new effects appeared *within the range of validity of the classical linear relation* (3). Now the second power of γ cannot appear in the expansion (6), since reversing the sign of γ must reverse the sign of τ . Thus POYNTING's experiments show that *before there are quantitative departures from the classical shearing law, two qualitatively new phenomena, not predicted at all by the classical theory, will make their appearance*. Of course an experimenter seeking only the classical effects never notices these new phenomena. POYNTING had preceded his experiments by a theoretical treatment, which had happened to arise in connection with his studies on radiation pressure, and thus he knew what to look for.

The third experiment was reported by RIVLIN in 1947. POYNTING's results had been forgotten and RIVLIN discovered them anew. RIVLIN's theoretical treatment was greatly superior, however, and he was able to predict the local surface stresses which would have to be supplied on the two ends of a cylinder in order to produce a purely torsional displacement, stresses which depend upon the distance from the axis. In the experiment (figure 1) a short thick cylinder of rubber was twisted by metal plates bonded to its end. One of the plates was pierced by several holes, into which the rubber tended to bulge upward. The height of the bulges was taken as proportional to the normal stresses¹⁾. Good agreement between theory and experiment was obtained. This experiment is, to the best of my knowledge, *the first locally quantitative experiment on large two-dimensional elastic strain which has ever been performed.*

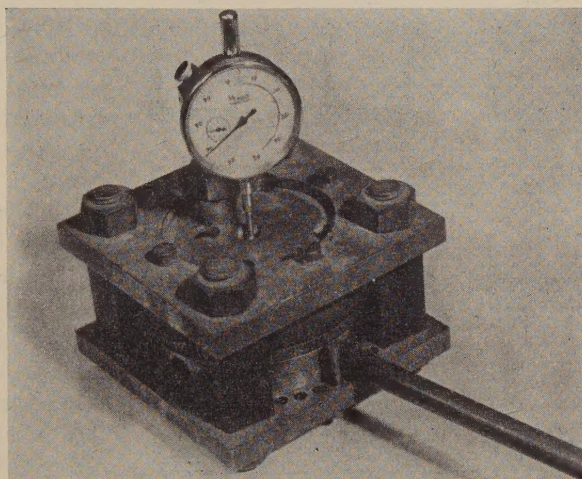


Fig. 1

RIVLIN's Torsion Apparatus. (Photograph courtesy of Mr. RIVLIN.)

The fourth experiment reveals an analogous behavior in fluids. According to the classical theory, a weightless fluid sheared between two concentric circular cylinders flows in planes perpendicular to the axis, and except for a slight capillary meniscus the free surface is plane. The profile of the region occupied by the fluid is not changed by the motion, since gravity is neglected. Very marked deviations from the classical prediction appear in the 1947 results of WEISSENBERG²⁾, some of which are illustrated in figure 2. The free surface climbs up the sides of both of the cylinders and falls in the interspace³⁾. This

¹⁾ Experimental difficulties prevented direct measurement of the forces required to flatten the surface by plugs pushed down into the holes.

²⁾ *Note added in proof.* This phenomenon was observed earlier by F. GARNER and A. NISSON, *Nature* 158, 634-635 (1946). A closely related effect is the swelling of a stream of fluid issuing from a straight pipe, first reported by A. MERRINGTON, *Nature* (1943).

³⁾ So far as I know, these experiments have never been fully described in print, and it is difficult to draw specific conclusions from them. From the lines 3 and 6 it is perfectly plain nevertheless that in order to produce in these liquids the horizontal free surface predicted by the classical theory when gravity is neglected, or the paraboloidal free surface resulting from the action of gravity, it would be necessary to supply *nonuniform normal pressures* altogether absent in the classical theory of fluids.

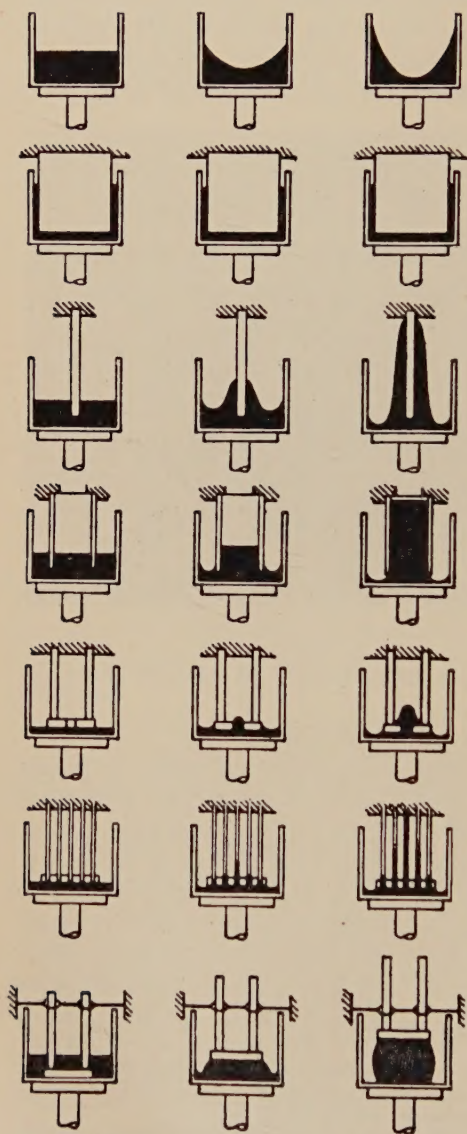


Fig. 2

Some of WEISSENBERG's Shearing Experiments
(after WEISSENBERG).

phenomenon had been partially predicted theoretically by REINER in 1945, who dismissed it as "never observed".

During the last two years many more experiments on the large deformations of rubber and "non-Newtonian" fluid flow have been reported. Since, while adding details concerning these long overlooked aspects of nature, they do not reveal any essential new phenomena beyond those already mentioned, I do not attempt to describe them.

The theoretical treatment appropriate to nonlinear theories of fluids and solids was indicated in very general terms by REINER in 1945, whose result includes as a special case a notable earlier attempt by BOUSSINESQ (1868). If the material be isotropic, the stress matrix \mathbf{T} may be supposed to be a power series in the strain (or rate of deformation) matrix \mathbf{F} :

$$\mathbf{T} = K_1 \mathbf{F} + K_2 \mathbf{F}^2 + K_3 \mathbf{F}^3 + \dots, \quad (8)$$

where K_1, K_2, K_3, \dots are scalars. The matrix of \mathbf{F} must satisfy its own Cayley-Hamilton equation, which for a 3·3 matrix assumes the form

$$\mathbf{F}^3 - \text{III } \mathbf{1} + \text{II } \mathbf{F} + \text{I } \mathbf{F}^2, \quad (9)$$

where $\mathbf{1}$ is the unit matrix and the principal invariants I, II, and III are expressed in terms of the proper values F_i of \mathbf{F} as follows:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} &= F_1 + F_2 + F_3, \\ \text{II} &= F_2 F_3 + F_3 F_1 + F_1 F_2, \\ \text{III} &= F_1 F_2 F_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

By (9), we may eliminate the third and all higher powers of I from (8), so that there results simply

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_0 \mathbf{1} + \mathcal{F}_1 I + \mathcal{F}_2 I^2, \quad (11)$$

where $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ are power series in I, II, III. Thus the stress matrix \mathbf{T} is exactly a quadratic matrix function of the matrix I , with coefficients \mathcal{F}_i which are in general infinite series in the scalar invariants of I . If, for example, we write out the terms of orders 1, 2, 3 in (10) we obtain

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} = & (\alpha + A I + B I^2 + C II + D I^3 + E I II + F III) \mathbf{1} \\ & + (G + H I + K I^2 + L II) I \\ & + (M + N I) I^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

The linear terms yield the classical laws of elasticity and viscosity (4) and (5)' the coefficients A and G being identifiable with the classical moduli λ and 2μ . For elasticity $\alpha = 0$, while for fluid dynamics $\alpha = -p$.

Now consider the case when the strain (or rate of deformation) matrix reduces to the form (7). Then $I = 0$, $II = r^2$, $III = 0$, and (12) yields

$$\mathbf{T} = (\alpha + C r^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + r(G + L r^2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + r^2 M \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

The classical result, that \mathbf{T} also is of the form (7), follows if C, L , and M be negligible. The two terms of *second* order in r represent *the new phenomena not predicted at all by the classical theory*: a hydrostatic pressure of magnitude $-C r^2$ and normal tensions of magnitude $M r^2$ in the plane of the motion must be supplied. If the hydrostatic pressure be wanting, the material will tend to contract or to expand, according to the sign of C , provided, of course, that it be compressible¹⁾. If the normal stresses be wanting, the material will tend to elongate or to shorten, according to the sign of M . The first effect, in the fully general form presented here, I propose to call the *Kelvin effect*; the second, the *Poynting effect*. These two effects thus appear as characteristic of nonlinear continuum mechanics, whether for fluids or for solids. The physical interpretation of the terms occurring in (9) will of course depend upon what particular theory is being considered. The third order term, whose coefficient is L , simply modifies the magnitude of the classical object of measurement; it is identical with the second term in the curve-fitting expansion (6), which thus blindly

¹⁾ In an *incompressible* material an arbitrary hydrostatic pressure (in effect, a Lagrangian multiplier) may be added to the stress, and thus for incompressible materials the first term in (13) does not represent a new effect.

excludes the really beautiful and dramatic part of nonlinear mechanics by tacitly assuming it does not exist.

From (13) follows a second result of primary physical significance: *the classical effect, the Kelvin effect, and the Poynting effect are governed by independent material qualities*, since each of the coefficients, C , G , L , M occurs in one and only one term. Here is a piece of good fortune for theorist and experimenter alike. From a knowledge of the classical viscosity coefficients of a fluid, for example, we can conclude *nothing* regarding the magnitude of the Poynting and Kelvin effects which that fluid will exhibit. At the same time, these second order effects are available for direct measurement, in no way obscured by the simultaneous first order classical effect or by the third order correction to its numerical value. It is plain, in fact, that to any accuracy whatever the Kelvin and Poynting effects depend upon the even order coefficients, while the classical effect depends upon the odd order coefficients¹⁾.

It is at first surprising that we have been able to conclude so much without ever defining strain, while there are many papers which give much attention to the supposed advantages of one or another type of strain measure. But in fact, as REINER pointed out, the *general form (11) is independent of the choice of strain measure Γ* . While indeed the numerical values of the coefficients in the power series \mathcal{F}_i in (11) are different for different strain measures Γ , the general form is unaffected, and thus the same general conclusions will follow. If, as is often proposed in empirical elasticity theories, $\mathcal{F}_2 = 0$ for a particular strain measure, then the Poynting effect is absent in a deformation which is a shearing strain in terms of Γ [i. e., in which Γ is of the form (7)], but it will appear in a deformation which is a shearing strain with respect to some other strain measure Γ' .

Reconsider briefly the case of simple extension. The strain or rate of deformation matrix is of the type

$$\Gamma = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}, \quad (14)$$

and in place of (13) there results

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 r + \mathcal{F}_2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 r + \mathcal{F}_2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 s + \mathcal{F}_2 s^2 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

where \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 are power series in both r and s . The stress matrix \mathbf{T} is of the

¹⁾ In the case of elasticity these conclusions apply only to a shearing strain but not to a shearing displacement (cf. footnote 1, page 83). It is the case of shearing displacement which is really important, but too elaborate to explain in a nontechnical survey. The *result* of the analysis of a shearing displacement is qualitatively similar, however, to that given above.

same form (14) as is Γ , so that while the classical effect experiences a complicated quantitative change, no qualitatively new phenomena appear. The modification in the classical value is of *second* order in r and s , however. Thus *the inadequacy of the classical theories will appear more quickly in extension than in shear*. Furthermore, the amount of the extension depends upon the values of the coefficients B , H , etc., which do not affect the outcome of a shearing experiment at all, so that *the results of experiments on extension, no matter how accurate, are insufficient to predict the response of a material to shear, and vice-versa*. In general, more interesting and valuable information is obtainable from shearing and torsion than from extension.

We may now revert to an earlier question, the range of validity of the classical theory of viscosity. We do not need to suppose the fluid isotropic. More generally, in place of (8) we consider

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}), \quad (16)$$

indicating that each component of \mathbf{T} is a function of all the components of \mathbf{D} . Since $\dim \mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-2}$, $\dim \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}$, it is evident that (16) is but an incomplete definition of a fluid: \mathbf{T} must depend not only upon the tensor \mathbf{D} , but also upon other quantities sufficient to yield a dimensionally invariant relationship. So long as these other quantities all be scalars, the analysis given above for the isotropic case needs no modification: the additional scalars will appear along with I, II, III as additional arguments of the coefficients \mathcal{F}_i in (11). These scalars are to be of two types: (1) representatives of the thermodynamic state and (2) *material constants* defining the particular type of fluid. For the former we select the pressure p and the temperature θ . As defining properties of the fluid itself we select a viscosity coefficient μ , whose dimensions are $\mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-1}$, and a reference temperature θ_0 (e. g. boiling point at 1 atm.). We must now make an essential choice: *either the fluid possesses a time constant t_0 , viz., a material constant of dimension \mathbf{T} , or it does not*. A material possessing both a Young's modulus E and a viscosity μ always has a time constant, since $\dim \mu/E = \mathbf{T}$.

We shall first work out the consequences of the existence of such a time constant. The defining relation (16) is now amplified to read

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}, t_0, \mu, p, \theta, \theta_0). \quad (17)$$

Hence

$$\frac{\mathbf{T} t_0}{\mu} = g(\mathbf{D}, t_0, \mu, p, \theta, \theta_0). \quad (18)$$

Each component of the dimensionless matrix on the left is thus a function of 14 quantities: the 9 components of \mathbf{D} and the 5 scalars. Since these 14 quantities are composed of the 3 independent dimensions $\mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-1}$, \mathbf{T} , and θ , the

arguments of the dimensionless function g must reduce to $14 - 3 = 11$ dimensionless ratios of these quantities. Such ratios are: the 9 components of $t_0 \mathbf{D}$, the 2 scalars $p t_0/\mu$, θ/θ_0 . Hence (18) reduces to the definitive form

$$\mathbf{T} = \frac{\mu}{t_0} g\left(t_0 \mathbf{D}, \frac{p t_0}{\mu}, \frac{\theta}{\theta_0}\right); \quad (19)$$

the stress \mathbf{T} depends upon the rate of deformation \mathbf{D} only through the dimensionless tensor $t_0 \mathbf{D}$. A similarity parameter of the resulting theory is consequently

$$\mathfrak{T}_R \equiv t_0 D \quad (20)$$

where D is a typical rate of deformation, and the criterion for validity of the classical linear approximation is $\mathfrak{T}_R \ll 1$: *the rate of deformation must be much smaller than the reciprocal time constant of the fluid*. In fact, by expanding (19) in a power series we find that t_0 cancels out of the linear terms only, and hence *the classical theory is the limiting case $t_0 \rightarrow 0$* . It is accordingly of the greatest physical importance to clarify the nature and meaning of the time constant and to devise an experiment for measuring it¹). No information on this subject is known at present.

Consider now the second possibility, that no time constant t_0 exists. Both from phenomenological considerations and from the kinetic theory²) model of a gas, this alternative might appear the more attractive. In place of (17) we begin now with the defining equation

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}, \mu, p, \theta, \theta_0). \quad (21)$$

Hence

$$\frac{\mathbf{T}}{p} = g(\mathbf{D}, \mu, p, \theta, \theta_0). \quad (22)$$

An argument similar to that employed in the previous case now yields

$$\frac{\mathbf{T}}{p} = g\left(\frac{\mu \mathbf{D}}{p}, \frac{\theta}{\theta_0}\right); \quad (23)$$

the ratio of stress to pressure depends upon rate of deformation \mathbf{D} , viscosity μ , and pressure p only through the dimensionless tensor $\mu \mathbf{D}/p$. Since p does not occur independently upon the right, we conclude that the coefficients of viscosity of all orders are independent of pressure, a result whose first approximation is well

¹) Note added in proof. Since this article was written, the nature of the time constant has been clarified and experiments for measuring it devised. See §§ 62, 67, 70, and 72 of my paper *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, to appear in Nos. 1 and 2 of vol. 1 of *The Journal of Rational Mechanics and Analysis* (1952).

²) It is perhaps necessary to remark that the Maxwellian relaxation time p/μ in the kinetic theory is not a time constant in the sense used here, since the pressure p is not a material constant.

known from MAXWELL's kinetic theory¹⁾. In addition to the Mach number, the Reynolds number, and the other classical scaling numbers we obtain another similarity parameter, the *truncation number*

$$\mathfrak{T} \equiv \frac{\mu D}{p}, \tag{24}$$

and for the validity of the classical linear approximation we have $\mathfrak{T} \ll 1$: *high viscosity, high rate of deformation, or low pressure* serve to invalidate the classical theory.

The fluid possessed of a time constant I call the *Reiner-Rivlin fluid*, while that devoid of such a constant I call the *Stokesian fluid*, since the two theories just presented seem to be natural consequences of the viewpoints taken by the persons after whom these names are given.

The low pressure effect in the Stokesian fluid is particularly interesting, for it explains why the classical equations of viscous fluids cannot govern high altitude aerodynamic phenomena. In the case of simple shearing, for example, if we put the results of our analysis into (13) and take $D = r$ in (24) we obtain for the total stress \mathbf{T} the expression

$$\frac{\mathbf{T}}{p} = (-1 + d \mathfrak{T}^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (a \mathfrak{T} + b \mathfrak{T}^3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + c \mathfrak{T}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

where a, b, c, d are dimensionless material constants (or functions of θ/θ_0 only). If we regard the shearing motion as taking place within parallel plates, we find that *the resistance experienced by the plates will differ from its classical value only if terms up to \mathfrak{T}^3 are taken into account: the terms in \mathfrak{T}^2 give rise to a hydrostatic pressure (Kelvin effect) and to normal stresses in the plane of motion (Poynting effect)*. That is, to produce this motion not only must the plates be sheared with respect to one another, but also the gas pressure must be adjusted and suitable normal pressures must be applied to the two plates. For a given relative motion of the two plates and for any given gas, *the new effects become more and more important the lower is the pressure*, being in fact proportional in magnitude to $1/p$, while the corresponding change in the resistance is proportional to $1/p^2$.

This brief survey has explained the beginnings of some new fields within classical mechanics. I shall conclude it by listing fourteen types of research, both experimental and theoretical, which can yield new physical information of interest and value. They represent research in the older style, which can be carried on by a single person.

¹⁾ This limitation can be avoided in a more general theory, where the thermodynamic pressure is distinguished from the mean pressure. In the linear theory of viscosity the confusion of the two pressures is equivalent to the "Stokes relation" $3\lambda + 2\mu = 0$.

(1) *Determination of moduli.* Exploratory work should determine rough values for the second and third order moduli and their dependence on pressure and temperature. Such values of these moduli as are now known are derived by inference from acoustical or thermoelastic measurements or by molecular hypotheses of doubtful validity. Materials could be classified according to the signs and ranges of their higher order moduli, and some exhibiting particularly marked Kelvin or Poynting effects might be found, and might even form the basis of practical application. For example a governor for a rotary drive shaft might be based upon the lengthening effect of excessive twisting; such a governor would permit the shaft to run smoothly at any speed and would exert control only when torsional oscillations reached a dangerous magnitude.

(2) *Generalization of the Kelvin and Poynting effects.* Our analysis above concerned only simple shearing. For torsion of a cylinder and flexure of a rectangular parallelepiped a similar analysis with similar results may be obtained, but there are other interesting simple situations where counterparts or analogues of the Kelvin and Poynting effects might appear.

(3) *Thermodynamics.* The thermodynamics of the nonlinear theories needs to be worked out. In particular, the specific form of the irreversibility law is completely unknown. When applied to the classical linear theory of viscosity it turns out to be equivalent to the Duhem-Stokes inequalities $\mu \geq 0$, $3\lambda + 2\mu \geq 0$. In the nonlinear theory it is easy to see both that the irreversibility law cannot be expressed in terms of inequalities on the coefficients alone and also that the Duhem-Stokes inequalities themselves are no longer necessarily valid. Beyond these negative statements nothing is known.

(4) *The time constant of fluids.* Which physical fluids have appreciable time constants? We might expect the time constant to be connected with relaxation phenomena, but analysis is wholly wanting.

(5) *Boundary conditions for fluids.* In the classical theory of viscous fluids the fluid is supposed to adhere to solid boundaries, or very nearly to do so. In the nonlinear theories the differential equations are of increasingly high degree, and this one condition does not appear to be sufficient to secure uniqueness. Neither by theory nor by experiment have any general supplementary boundary conditions yet been discovered. While a rarefied gas is known to slip past a wall, no quantitative boundary condition expressing this effect has yet been generally accepted.

(6) *Capillarity.* The interaction of capillarity and viscosity was discussed long ago by BOUSSINESQ. Dynamic capillarity experiments on fluids exhibiting nonlinear viscosity might reveal new interaction phenomena.

(7) *Significance of multiple solutions for fluids. Stability.* If one puts the relation (10) into CAUCHY's laws of motion (1) one finds that for a steady flow between parallel plates the velocity profile must be linear, as in the classical theory, but that corresponding to any given resistance there exist an odd

number of different profiles. For the Reiner-Rivlin fluid these are independent of pressure, but for the Stokesian fluid they depend upon it. Are they all real? The answer may relate in part to the answer to question (3). Of those which are real, are all stable? How can the different cases be produced in experiments? Evidently this type of difficulty is not limited to the case of simply shearing. There are similar but more elaborate questions in nonlinear elasticity.

(8) *Turbulence and stability.* In connection with question (7) we may ask, can the higher order terms become important in turbulent motions, or in questions of hydrodynamical stability?

(9) *Anisotropic materials.* The generalizations of Poynting and Kelvin effects which can occur in crystals promise dramatic results in theory and experiment alike, as well as numerous technical applications.

(10) *Ultrasonic studies.* The effect of the higher order moduli, particularly in fluids, should appear markedly in oscillations of sufficiently high frequency, despite the tiny amplitude of particle motion.

(11) *Damping.* The simple expedient of superposing ordinary viscous damping upon ordinary elastic strain, to which an excessive body of engineering literature has been devoted, rarely if ever yields results in accord with experiment even for very small strains. To obtain a realistic theory of damping, even for materials which are perfectly elastic in static deformation, a new idea is necessary.

(12) *Dynamic elasticity.* Thus far our only knowledge of dynamic nonlinear elasticity is contained in the general results on wave propagation derived by HADAMARD, DUHEM, JOUGUET, and TOLOTTI. The effect of nonlinear response upon motion, particularly in the theory of oscillations, might yield some unexpected consequences. The connection between torsional modes and extensional modes for a shaft, for example, might have either amplifying or damping effects on the torsional oscillations. There is also the possibility that the rate theory of JAUMANN and MURNAGHAN, in which stress increments are proportional to strain increments, may be rendered sufficiently tractable to be studied with profit.

(13) *Photoelasticity.* Means of measuring nonlinear elastic stresses by photoelastic means are yet to be devised.

(14) *More complicated media.* Not for all gross bodies can the stress be described by a simple function of another tensor, as in the analysis sketched earlier. A more accurate theory can be obtained by permitting interplay between stress and heat flux. My theory of the *Maxwellian fluid*, too elaborate to describe in this note, represents a first tentative in this direction. The need for such a theory first arose in connection with upper atmosphere phenomena, but there are other interesting possibilities, an example being furnished by a chemical reaction taking place on a capillary film.

BIBLIOGRAPHY

The material treated here and many other related topics are summarized in

- C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rat. Mech. Analysis 1, Nos. 1 and 2 (1952).

A fuller discussion of fluids is given in

- C. TRUESDELL, *A New Definition of a Fluid*, I: *The Stokesian Fluid*, II: *The Maxwellian Fluid*, J. Math. pures appl. 29, 215–244 (1950); 30, 111–158 (1951).

References for axioms of mechanics:

- G. HAMEL, *Über die Grundlagen der Mechanik*, Math. Ann. 66, 350–397 (1908).
– *Die Axiome der Mechanik*, in: *Handbuch der Physik*, vol. 5 (Julius Springer, Berlin, 1927), pp. 1–42.

Reference for general continuum mechanics:

- R. VON MISES, *Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Continua*, Proc. 3rd Int. Congr. appl. Mech., Stockholm 2, 1–9 (1930).

References for experiments:

- J. H. POYNTING, *On Pressure Perpendicular to the Shear-Plane in Finite Pure Shears, and on the Lengthening of Loaded Wires when Twisted*, Proc. Roy. Soc. London [A] 82, 546–559 (1909) = *Papers*, vol. 2, p. 358.
– *On the Changes in the Dimensions of a Steel Wire when Twisted, and on the Pressure of Distortional Waves in Steel*, Proc. Roy. Soc. London [A] 86, 534–561 (1912) = *Papers*, vol. 2, pp. 397–423.
– *The Changes in the Length and Volume of an India-Rubber Cord when Twisted*, India-Rubber J., Oct. 4, p. 6 (1913) = *Papers*, vol. 2, pp. 424–425.
H. BATEMAN, *Motion of an Incompressible Viscous Fluid*, Part II of *Report of the Committee on Hydrodynamics*, Bull. nat. Res. Council No. 84 (1932), see § 1.7.
R. S. RIVLIN, *Torsion of a Rubber Cylinder*, J. appl. Phys. 18, 444–449, 837 (1947).
K. WEISSENBERG, *A Continuum Theory of Rheological Phenomena*, Nature 159, 310–311 (1947).
R. S. RIVLIN and D. W. SAUNDERS, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials*, VII: *Experiments on the Deformation of Rubber*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 243, 251–298 (1951).

Other references for theory:

- J. BOUSSINESQ, *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, J. Math. pures appl. [2] 13, 377–438 (1868), see Note 1.
W. THOMSON (Lord KELVIN) and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Part. I, 2nd ed., vol. 2 (University Press, Cambridge, 1883), see § 679.
O. REYNOLDS, *On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Contact. With experimental illustrations*, Phil. Mag. [2] 20, 469–484 (1885) = *Papers*, vol. 2, pp. 203–216.
– *Experiments Showing Dilatancy, a Property of Granular Material, Possibly Connected with Gravitation*, Proc. Roy. Inst. Great Britain 11, 354–363 (1887) = *Papers*, vol. 2, pp. 217–227.
G. JAUMANN, *Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 120 (IIa), 385–530 (1911), see § IX.
M. REINER, *A Mathematical Theory of Dilatancy*, Amer. J. Math. 67, 350–362 (1945).
– *Elasticity beyond the Elastic Limit*, Amer. J. Math. 70, 433–446 (1948).

- R. S. RIVLIN, *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids*, I–II, Proc. Roy. Soc. London [A] 193, 260–281 (1948); Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 88–91 (1949).
 – *Normal Stress Coefficient in Solutions of Macromolecules*, Nature 161, 567–569 (1948).
 – *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials*, I–VI, Phil. Trans. Roy. Soc. [A] 240, 459–525 (1948); 241, 379–397 (1948); 242, 173–195 (1949); Proc. Roy. Soc. [A] 195, 463–473 (1949).
 – *A Uniqueness Theorem in the Theory of Highly-Elastic Materials*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 44, 595–597 (1948).
 – *A Note on the Torsion of an Incompressible Highly-Elastic Cylinder*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 485–487 (1949).
 F. D. MURNAGHAN, *The Foundations of the Theory of Elasticity* (1947), pp. 158–174 in: *Non-Linear Problems in Mechanics of Continua* (Amer. Math. Soc., New York, 1949).

Zusammenfassung

Nach einigen Bemerkungen über die Grundlagen der klassischen Mechanik behandelt dieser Artikel die allgemeine Natur der nichtlinearen Elastizität und Viskosität. Die Experimente, die das Vorhandensein von eigentlich nichtlinearen Federkräften und den Zustand des Fließens anzeigen, werden zusammengefaßt. Eine allgemeine Untersuchung von REINER, die zeigt, daß jede Theorie nichtlinearer Vorgänge qualitative Merkmale dieser Phänomene angibt, wird wiedergegeben und erläutert. Für diese beiden, im wesentlichen voneinander verschiedenen, aber vorausgesagten neuen Phänomene werden die Bezeichnungen *Kelvin-Effekt* und *Poynting-Effekt* vorgeschlagen. Die Theorie der nichtlinearen Viskosität in Flüssigkeiten wird mit Hilfe des Dimensionsprinzips auf eine mehr explizite Form zurückgeführt. Zwei verschiedene Flüssigkeiten werden unterschieden: die «Stokessche Flüssigkeit», die vom Autor angegeben worden ist, in der keine Materialkonstante der Zeitdimension besteht, und die Theorie von REINER und RIVLIN, in der eine Zeitkonstante von Wichtigkeit ist. Diese einleitenden Betrachtungen führen zum Hauptteil des Artikels, zu einem Programm von 11 Richtlinien physikalischer Forschung — sowohl für die Theorie als auch für das Experiment —, das angegeben wird in der Hoffnung, daß, angeregt durch das Vorhandensein dieser weitreichenden und wichtigen, noch ungelösten physikalischen Probleme, maßgebende Physiker veranlaßt werden, in das neue Gebiet der nichtlinearen Mechanik der Continua weiter vorzudringen.

(Received: July 16, 1951.)

Knickung gerader Stäbe unter Torsion

VON HANS ZIEGLER, ETH., Zürich






1. Einleitung

Seitdem A. G. GREENHILL [1]¹⁾ die kritische Belastung der auf Druck und Torsion beanspruchten Welle untersucht hat, wird bei Stabilitätsproblemen ähnlicher Art vorausgesetzt, daß die Momentenvektoren \mathfrak{M} , welche die belastenden Kräftepaare darstellen, bei der Deformation axial gerichtet bleiben. Wie der Verfasser kürzlich gezeigt hat [2], sind aber solche Kräftepaare nur ausnahmsweise konservativ [3]; beim Stab mit zwei Endmomenten (vgl. Tafel 1)

Tafel 1

Knickung durch ein axiales Moment

k Knickfaktor in der Greenhillschen Formel (I. 1)

Knickfall	Ia	IIa	IIIa	IVa	Va
Randbed.					
k	2,861	2	0	0	2

beispielsweise nur dann, wenn er an beiden Enden (entweder fest oder aber translatorisch verschieblich) eingespannt ist. Nach einer weiteren Untersuchung des Verfassers [4]²⁾ darf die kritische Belastung nur bei konservativen Problemen mit Hilfe des statischen oder energetischen Stabilitätskriteriums ermittelt werden, während im allgemeinen allein das kinetische Kriterium in Frage kommt. Dieses macht die Untersuchung der Biegeschwingungen unter der gegebenen Belastung nötig und führt auf Ergebnisse, die sich in vielen Fällen

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 118.

²⁾ Vergleiche auch [5] und [6].

nur schlecht mit der Erfahrung decken, und zwar nicht nur in den Knickfällen von Tafel 1, sondern beispielsweise auch dann, wenn der Stab zusätzlich auf Druck beansprucht oder nach der kritischen Drehzahl einer gedrückten und tordierten Welle gefragt wird.

Von den fünf einfachen, in Tafel 1 zusammengestellten Fällen von Knickung unter einem axialen Moment sind Ia und IIa konservativ; das kritische Moment darf also mit dem statischen Stabilitätskriterium ermittelt werden. Es ist für den Stab mit der Länge l und der vom Querschnitt und der Achse durch seinen Schwerpunkt unabhängigen Biegesteifigkeit α bereits durch A. G. GREENHILL [1] mit

$$W_k = \pm k \pi \frac{\alpha}{l}$$

(1. 1)

angegeben worden, und zwar ist ihm zufolge im Fall Ia $k = 4$ und im Fall IIa $k = 2$ einzusetzen. Bei der Überprüfung dieser Werte hat A. TRÖSCH [7] festgestellt, daß der Greenhillsche Rückschluß von IIa auf Ia unzulässig und im Falle Ia in Übereinstimmung mit einem bereits von E. L. NICOLAI [8] gewonnenen Resultat $k = 2,861$ zu setzen ist. Im Gegensatz zu diesen beiden Fällen sind aber die übrigen nichtkonservativ. Mit Hilfe des kinetischen Kriteriums hat der Verfasser [2] nachgewiesen, daß der Stab im Fall IIIa unter jedem Moment $W \neq 0$ labil ist, und dasselbe Ergebnis hat A. TRÖSCH [7] seither für den Fall IVa erhalten. In beiden Fällen ist mithin in der Greenhillschen Formel (1. 1) $k = 0$ zu setzen. Ferner ist der Wert $k = 2$, den A. G. GREENHILL für Fall Va mit dem statischen Kriterium gewonnen hat, fragwürdig, da dieses Kriterium hier illegitim ist. Er ist aber durch eine Untersuchung von A. TRÖSCH [7] bestätigt worden.

Diese Ergebnisse – vor allem diejenigen in den Fällen IIIa und IVa sowie die Resultate analoger Untersuchungen [2], [7], denen zufolge bei gewissen Lagerungen unter einem axialen Moment jede Drehzahl einer Welle kritisch ist – haben, auch wenn mit einer Verbesserung der Stabilitätsverhältnisse bei Berücksichtigung der Dämpfung [7] und der endlichen Dicke des Stabes gerechnet werden darf, etwas Unbefriedigendes an sich. Der Verfasser hat daher zunächst versucht, das Problem unter der Annahme neu zu bearbeiten, daß die Momentenvektoren \mathfrak{M} der belastenden Kräftepaare bei der Deformation nicht axial, sondern tangential zur elastischen Linie bleiben (wobei die Knickfälle IIIa bis Va in diejenigen von Figur 1 übergehen, während Ia und IIa sich nicht ändern). Bei der Berechnung der virtuellen Arbeit, welche das tangential

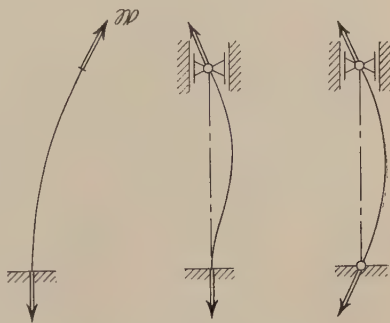


Fig. 1
Belastung durch tangentiale Momente.

Moment bei einer virtuellen Deformation des Stabes leistet, stellt sich indessen heraus, daß \mathfrak{M} auch jetzt nicht konservativ ist, indem der entscheidende Randterm in [2], (7. 16), nicht verschwindet, sondern sein Vorzeichen wechselt. Damit ist einerseits wieder mit Instabilitäten unter beliebig kleiner Belastung zu rechnen; andererseits stellt sich aber die Frage, ob nicht mit der Annahme eines halb axialen, halb tangentialen Momentes ein Fortschritt zu erzielen sei.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß das Problem konservativ wird und auf plausiblere Resultate führt, wenn man auf Voraussetzungen über die Richtung des Momentvektors \mathfrak{M} verzichtet, statt dessen auf die ihn erzeugenden Einzelkräfte zurückgeht und für diese zweckmäßige Annahmen trifft¹⁾. Dabei wird sich herausstellen, daß ganz von selbst ein Vektor \mathfrak{M} erhalten wird, der halbwegs tangential zur elastischen Linie ist. Da aber hinsichtlich der Einzelkräfte verschiedene Voraussetzungen möglich und praktisch realisierbar sind, wird es nötig, zwischen verschiedenen Arten von belastenden Momenten \mathfrak{M} zu unterscheiden, die auch in ihren kritischen Werten erheblich voneinander abweichen können. Das Problem ist eben in Wirklichkeit viel differenzierter, als bisher angenommen wurde; die Konzeption eines axialen Momentes stellt tatsächlich nur eine von mehreren Arbeitshypothesen dar, und zwar eine verhältnismäßig ungünstige, da sie den praktisch vorliegenden Verhältnissen nur äußerst selten entspricht.

Im einzelnen wird es sich darum handeln, die vom praktischen Standpunkt aus wichtigsten Belastungsarten herauszugreifen, den Nachweis zu erbringen, daß die zugehörigen Momente \mathfrak{M} konservativ sind, und sodann in einzelnen Fällen ihre kritischen Werte zu bestimmen. Dabei sind die grundsätzlichen Betrachtungen des nächsten Abschnitts noch ganz allgemein gefaßt, mithin auch für kompliziertere Aufgaben dieser Art und insbesondere für Drehzahlprobleme gültig. Von Abschnitt 3 an wird im Interesse einer einfacheren Darstellung vorausgesetzt, daß der Stab nur an den Enden belastet und prismatisch sei sowie nur eine einzige Biegesteifigkeit besitze, während in den weiteren Abschnitten, mit Ausnahme von 7, die Belastung auf Endmomente beschränkt und als Beispiele nur noch die Knickfälle I bis V unter den neuen Annahmen über die Richtung von \mathfrak{M} behandelt werden.

2. Kraftangriff und Moment

Bezieht man einen geraden Stab auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) , dessen Ursprung im unteren Endquerschnitt liegt und dessen z -Achse mit der Stabachse zusammenfällt, so ist man in der Wahl der Kräfte, die eine Belastung des Schnittes z_1 durch einen Momentvektor \mathfrak{M} darstellen, noch weit-

¹⁾ Wie mir Herr Prof. Dr. W. T. KOITER brieflich mitteilt, hat auch er diese Feststellung gemacht. Er behandelt in einer Arbeit, die vor der Veröffentlichung steht, die Einleitung des Torsionsmomentes durch ein Kreuzgelenk.

gehend frei. Sitzt eine (etwa in zwei Punkten) *in ihrer Ebene* beaufschlagte Turbinenscheibe auf dem Stab, so hat man mit einem Kräftepaar zu tun, das sich auch bei der Deformation des Stabes nicht ändert, also ausnahmsweise mit einem axialen Moment. Im allgemeinen (zum Beispiel bei der *schief* beaufschlagten Turbine) wandern indessen die Angriffspunkte bei der Deformation. Um den praktisch vorkommenden Fällen nach Möglichkeit gerecht zu werden, lassen wir eine solche Wanderung zu, setzen aber die Kräfte nach Betrag und Richtung grundsätzlich als konstant voraus und beschränken uns im übrigen auf die Anordnungen von Figur 2, nämlich

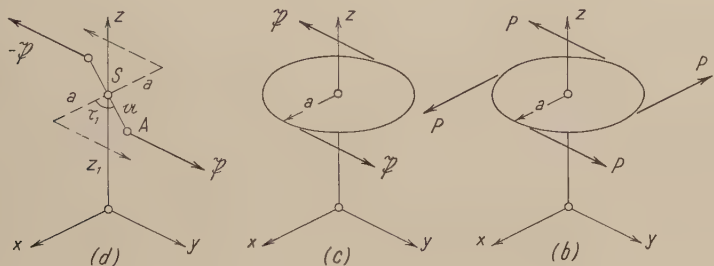


Fig. 2

Belastung durch konstante Kräfte. (d) Querarm mit Kräftepaar (pseudotangenciales Moment), (c) Scheibe mit Kräftepaar (quasitangenciales Moment), (b) Scheibe mit gleichmäßiger Verteilung von mehr als zwei Umfangskräften (semitangenciales Moment).

- (d) auf das Kräftepaar $\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$, das an einem rechtwinklig und starr mit dem Stab verbundenen Querbalken der Länge $2a$ angreift,
- (c) auf das Kräftepaar an einer zum Stab normalen und starr mit ihm verbundenen Scheibe vom Radius a ,
- (b) auf die gleichmäßige Verteilung von mehr als zwei gleich großen, am Umfang einer solchen Scheibe wirkenden Azimutalkräften, die auch die kontinuierliche Belastung durch eine pro Bogeneinheit konstante Umfangskraft in sich schließt.

Den Kraftangriff kann man sich in allen drei Fällen durch Fäden realisiert denken; daneben kommt (d) im elektrischen oder magnetischen Kraftfeld, (c) bei zweifach und (b) bei mehrfach sowie gleichmäßig beaufschlagten Turbinen in Frage¹⁾.

Solange die Belastung genügend klein ist, bleibt die Stabachse gerade, und der auf Torsion beanspruchte Stab erfährt lediglich eine Verdrehung, die im Schnitt z durch den – möglicherweise großen – Winkel $\tau(z)$ gemessen werden kann. Fall (d) unterscheidet sich von den beiden andern grundsätzlich dadurch,

¹⁾ Bei der Einleitung des Torsionsmomentes durch Kreuzgelenke nach W.T. KOITER liegt ein mit (c) verwandter Fall vor, der sich aber nur unter speziellen Randbedingungen mit (c) deckt.

daß bei dieser Verdrehung das belastende Moment vom Wert W_0 auf

$$W = W_0 \cos \tau_1 \quad (2.1)$$

absinkt, während für (c) und (b) $W = W_0$ gilt, und daraus folgt insbesondere, daß im Fall (d) $\tau(z_1) < \pi/2$ ist.

Unter der kritischen Belastung krümmt sich die Stabachse und geht in die elastische Linie $x(z)$, $y(z)$ über: zugleich ändert sich die Verdrehung $\tau(z)$ um $\varepsilon(z)$, und neben der Torsion tritt im einzelnen Schnitt eine Biegebeanspruchung auf. Da für die Bestimmung der kritischen Belastung nur der Beginn des Knickens interessiert, kann man die Verschiebungen x , y als klein gegen die Stablänge l betrachten, ihre Ableitungen x' , y' nach z sowie den Drehwinkel ε als klein gegen 1 und die Biegemomente als klein gegen W . Sodann darf man sich – von den Energiebetrachtungen des nächsten Abschnittes abgesehen, welche die Mitnahme von zweiter Ordnung kleiner Glieder erfordern – auf die Berücksichtigung der Terme erster Ordnung beschränken.

Die unter der kritischen Belastung auftretende Verformung des Stabes hat für den Querschnitt z_1 in erster Näherung eine Translation um den Vektor $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, 0)$ sowie eine Drehung um den vektoriellen Winkel $\mathbf{v}_1(-y'_1, x'_1, \varepsilon_1)$ zur Folge. Orientiert man im Fall (d) das Koordinatensystem so, daß die y -Achse die Richtung von \mathfrak{P} (die x -Achse mithin diejenige des Querarms am unbelasteten Stab) hat, so resultiert für den Fahrstrahl $\mathbf{a}(a \cos \tau_1, a \sin \tau_1, 0)$, welcher den Schwerpunkt S des Schnittes mit dem Angriffspunkt A der Kraft $\mathfrak{P}(0, P, 0)$ verbindet, aus dieser Bewegung eine Änderung

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a} = a (-\varepsilon_1 \sin \tau_1, \varepsilon_1 \cos \tau_1, -x'_1 \cos \tau_1 - y'_1 \sin \tau_1)$$

und für das statische Moment $\mathbf{a} \times \mathfrak{P}$ von \mathfrak{P} bezüglich S die Änderung

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathfrak{P} = P a (x'_1 \cos \tau_1 + y'_1 \sin \tau_1, 0, -\varepsilon_1 \sin \tau_1).$$

Der Momentvektor des Paares, der unmittelbar vor dem Knicken die Komponenten $(0, 0, W = 2 P a \cos \tau_1)$ hat, geht also unter der kritischen Belastung in

$$\mathfrak{M} = W (x'_1 + y'_1 \operatorname{tg} \tau_1, 0, 1 - \varepsilon_1 \operatorname{tg} \tau_1) \quad (2.2)$$

über. Er neigt sich gegen die Stabachse, ohne indessen tangential zur elastischen Linie zu bleiben, und soll, um die Diskussion zu erleichtern, als *pseudotangential* bezeichnet werden. Man hat damit

Satz 1. Der Momentvektor eines Kräftepaares, das aus zwei nach Betrag und Richtung konstanten, an einem Querarm angreifenden Kräften besteht, ist pseudo-

tangential, das heißt, er besitzt im Koordinatensystem der Figur 2 (d) die Komponenten (2.2).

Fall (c) unterscheidet sich von (d) dadurch, daß sich der Fahrstrahl des Angriffspunktes von \mathfrak{P} während der dem Knicken vorangehenden Torsion nicht ändert, so daß $\mathbf{a}(a, 0, 0)$ ist. Gibt man der y -Achse auch hier die Richtung von \mathfrak{P} , so hat man also (obschon $\tau_1 \neq 0$ ist) in den soeben angeschriebenen Beziehungen nur $\tau_1 = 0$ zu setzen, um sie dem neuen Fall anzupassen. Man erhält damit für den Momentvektor des Paares, der ursprünglich die Komponenten $(0, 0, W = 2Pa)$ aufweist, statt (2.2)

$$\mathfrak{W} = W(x'_1, 0, 1). \quad (2.3)$$

Er ist, auf die (x, z) -Ebene projiziert, tangential zur Projektion der elastischen Linie, in seiner Projektion auf die (y, z) -Ebene dagegen axial, und soll als *quasitangential* bezeichnet werden. Man hat somit:

Satz 2. Der Momentvektor eines Kräftepaares, das aus zwei nach Betrag und Richtung konstanten, an einer Kreisscheibe angreifenden Kräften besteht, ist *quasitangential*, das heißt in seiner Projektion auf die Normalebene zur einen Kraft \mathfrak{P} des Paares tangential zur Projektion der elastischen Linie, in der Projektion auf die durch \mathfrak{P} und die Stabachse aufgespannte Ebene dagegen axial.

Als Vorbereitung für den Fall (b) betrachten wir nochmals die Kraft \mathfrak{P} , diesmal aber ohne eine Voraussetzung über die Orientierung des Koordinatensystems zu treffen, so daß sie (Figur 3) unter einem beliebigen Winkel β gegen die x -Achse geneigt ist. Der Fahrstrahl von A und die Kraft \mathfrak{P} sind dann vor dem Knicken durch $\mathbf{a}(a \cos \beta, a \sin \beta, 0)$ bzw. $\mathfrak{P}(-P \sin \beta, P \cos \beta, 0)$ gegeben; die Änderung von \mathbf{a} ist

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a} = a(-\varepsilon_1 \sin \beta, \varepsilon_1 \cos \beta, -x'_1 \cos \beta - y'_1 \sin \beta)$$

und die Änderung von $\mathbf{a} \times \mathfrak{P}$

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathfrak{P} = Pa(x'_1 \cos^2 \beta + y'_1 \cos \beta \sin \beta, x'_1 \cos \beta \sin \beta + y'_1 \sin^2 \beta, 0).$$

Geht man nun zur Verteilung von n Kräften P mit den Zwischenwinkeln $2\pi/n$ über, so erhält man für den Vektor \mathfrak{W} , der ursprünglich die Komponenten $(0, 0, W = nPa)$ hat, die neuen Komponenten

$$W_x = Pa(A x'_1 + C y'_1), \quad W_y = Pa(C x'_1 + B y'_1), \quad W_z = nPa, \quad (2.4)$$

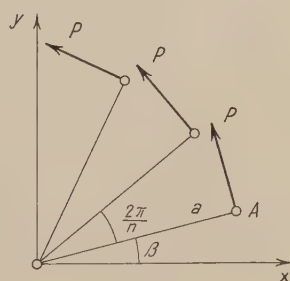


Fig. 3
Belastung durch gleichmäßig verteilte Umfangskräfte.

wobei die Abkürzungen A , B und C durch

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^n \cos^2 \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 + \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\}, \\ B &= \sum_{k=1}^n \sin^2 \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 - \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\}, \\ C &= \sum_{k=1}^n \cos \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \sin \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \end{aligned}$$

gegeben sind. Diesen Beziehungen entnimmt man ohne weiteres

$$A = 1 + \cos 2\beta, \quad B = 1 - \cos 2\beta, \quad C = \sin 2\beta, \quad (n=2) \quad (2.5)$$

mit Hilfe der (aus der Moivreschen Formel entspringenden) Identitäten¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos[\varphi + (k-1)\psi] &= \frac{\sin \frac{n\psi}{2} \cos\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\psi\right)}{\sin \frac{\psi}{2}}, \\ \sum_{k=1}^n \sin[\varphi + (k-1)\psi] &= \frac{\sin \frac{n\psi}{2} \sin\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\psi\right)}{\sin \frac{\psi}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (\psi \neq 2\pi, 4\pi, \dots)$$

ferner

$$A = B = \frac{n}{2}, \quad C = 0. \quad (n > 2) \quad (2.6)$$

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so erhält man die – hier nicht benötigte – Verallgemeinerung von (2.3) für ein beliebig orientiertes Achsenkreuz. Durch Einsetzen von (2.6) dagegen gewinnt man – unabhängig von β –

$$W_x = \frac{1}{2} n P a x'_1, \quad W_y = \frac{1}{2} n P a y'_1, \quad W_z = n P a,$$

mithin den Momentvektor

$$\mathfrak{B} = W \left(\frac{1}{2} x'_1, \frac{1}{2} y'_1, 1 \right), \quad (2.7)$$

¹⁾ Vergleiche etwa E. HAMMER, *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, 3. Aufl. (Metzler, Stuttgart 1907), S. 216.

der halbwegs tangential zur elastischen Linie ist und als *semitangential* bezeichnet werden soll. Dieses Ergebnis, das sich übrigens für $n = 4$ auch direkt durch Überlagerung zweier Fälle nach Figur 2 (c) ableiten läßt, führt auf

Satz 3. *Der Momentenvektor, der einer gleichmäßigen Verteilung von mehr als zwei (und auch von unendlich vielen) gleich großen und konstanten Azimutalkräften an einer Kreisscheibe entspricht, ist semitangential, das heißt, er halbiert den Winkel zwischen der Achse und der Tangente an die elastische Linie.*

3. Virtuelle Arbeiten und Energien

Wir beschränken uns nun auf den prismatischen Stab (Figur 4) mit einer einzigen Biegesteifigkeit α und nehmen, um uns bezüglich der kinematischen Randbedingungen die nötige Freiheit zu wahren, an, daß er nur am oberen Ende $z = l$, und zwar durch ein Moment $\mathfrak{M}_l(W_{xl}, W_{yl}, W_{zl})$ gemäß Abschnitt 2 sowie durch eine zur Achse normale Kraft $\mathfrak{R}(K_x, K_y, 0)$ belastet sei. Führt man mit $\mathbf{v}(v_x = x', v_y = y', v_z = 1)$ den tangentialen Einheitsvektor ein, so ist die elastische Linie durch die Krümmungen v'_x, v'_y ihrer Projektionen gegeben, die Torsion durch den spezifischen Drehwinkel $\omega + \varepsilon'$, der sich aus dem konstanten, mit der Torsionssteifigkeit γ gemäß

$$\omega = \frac{W}{\gamma} \quad (3.1)$$

zu berechnenden Anteil unmittelbar vor dem Ausknicken und dem mit der Ausbiegung auftretenden Zuwachs ε' zusammensetzt.

Die Deformationsenergie des Stabes ist in bekannter Weise durch

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [\alpha (v'_x{}^2 + v'_y{}^2) + \gamma (\omega + \varepsilon')^2] dz \quad (3.2)$$

bestimmt, die Arbeit der inneren Kräfte bei einer virtuellen, durch die Variationen $\delta x, \delta y, \delta \varepsilon$ definierten Verformung mithin durch

$$\delta A_i = -\delta U = - \int_0^l [\alpha (v'_x \delta v'_x + v'_y \delta v'_y) + \gamma (\omega + \varepsilon') \delta \varepsilon'] dz,$$

und dafür erhält man, partiell integriert,

$$\delta A_i = \int_0^l [\alpha (v''_x \delta v_x + v''_y \delta v_y) + \gamma \varepsilon'' \delta \varepsilon] dz - [\alpha (v'_x \delta v_x + v'_y \delta v_y) + \gamma (\omega + \varepsilon') \delta \varepsilon']_0^l. \quad (3.3)$$

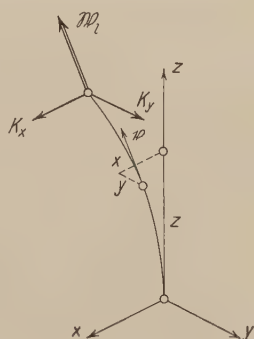


Fig. 4
Belastung durch eine
Dynamie $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}_l$.

Da sich das obere Stabende um

$$\mathbf{r}_l = \int_0^l \mathbf{v} \, dz \quad (3.4)$$

verschiebt, ist ferner

$$V_K \doteq - \int_0^l (K_x v_x + K_y v_y) \, dz \quad (3.5)$$

das Potential der Kraft \mathbf{K} und

$$\delta A_K = -\delta V_K = \int_0^l (K_x \delta v_x + K_y \delta v_y) \, dz \quad (3.6)$$

ihre virtuelle Arbeit.

Mit der virtuellen Arbeit des Momentes \mathfrak{M}_l kann gleichzeitig diejenige des Momentes $\mathfrak{M}_0(W_{x0}, W_{y0}, W_{z0})$ am unteren Stabende berechnet werden, die unter Umständen (zum Beispiel im Knickfall V, Tafel 2) von Null verschieden sein kann. Denkt man sich zu diesem Zweck zunächst ein einzelnes Stabelement dz mit festgehaltenem unterem Ende z deformiert, so gibt die Änderung $\delta \mathbf{v}' \, dz$ des Tangentenvektors $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \, dz$ am oberen Ende $z + dz$ die virtuelle Verbiegung an, während die virtuelle Verdrehung durch $\delta \varepsilon' \, dz$ gegeben ist. Bezeichnet man den vektoriellen Winkel, um den sich dabei das obere Ende des Elementes dem unteren gegenüber verdreht, mit $\delta \mathbf{u} \, dz$, wobei $\delta \mathbf{u}$ die Komponenten $(\delta \kappa_x, \delta \kappa_y, \delta \kappa_z)$ besitzt, so gilt

$$\delta \mathbf{v}' \, dz = \delta \mathbf{u} \, dz \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}' \, dz) = \delta \mathbf{u} \times \mathbf{v} \, dz$$

und damit in erster Näherung

$$\delta v'_x = \delta \kappa_y, \quad \delta v'_y = -\delta \kappa_x. \quad (3.7)$$

Da ferner die virtuelle Drehung um die Tangente an die elastische Linie $\delta \varepsilon' \, dz$ sein muß, ist

$$\delta \varepsilon' \, dz = \delta \mathbf{u} \, dz \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}' \, dz) = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, dz,$$

mithin

$$\delta \varepsilon' = v_x \delta \kappa_x + v_y \delta \kappa_y + \delta \kappa_z; \quad (3.8)$$

man hat daher nach (3. 7) und (3. 8)

$$\delta \kappa_x = -\delta v'_y, \quad \delta \kappa_y = \delta v'_x, \quad \delta \kappa_z = v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon'.$$

Mit Rücksicht auf das Momentengleichgewicht für die z -Achse kann man

$$W_{zl} = -W_{z0} = W_z \quad (3.9)$$

setzen und erhält jetzt mit

$$\delta A_W = W_z \int_0^l (v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon') dz - (W_x \delta v_y - W_y \delta v_x)_l - (W_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}} - W_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}})_0 \quad (3.10)$$

die virtuelle Arbeit der Momente \mathfrak{M}_l und \mathfrak{M}_0 , wobei mit den Querstrichen im letzten Term der Tatsache Rechnung getragen wird, daß (Figur 5) im pseudo- und quasitangentialen Fall das am unteren Ende angreifende Kräftepaar dem oberen gegenüber verdreht sein kann. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} & \delta \left[\frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz \right] \\ &= W_z \int_0^l (v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon') dz \\ &+ \frac{1}{2} W_z (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l \end{aligned}$$

noch umformen, und dabei darf der letzte Klammerausdruck für die untere Grenze durch $(v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0$ ersetzt werden, da er bis auf den Faktor 1/2 die bei der virtuellen Deformation von der Grundrißprojektion des Vektors \mathbf{v}_0 überstrichene Fläche darstellt und somit einer Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse gegenüber invariant ist. Man hat also

$$\delta A_W = \delta \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz \\ & + \left[\left(W_y - \frac{1}{2} W_z v_y \right) \delta v_x - \left(W_x - \frac{1}{2} W_z v_x \right) \delta v_y \right]_l \\ & + \left[\left(W_{\bar{y}} + \frac{1}{2} W_z v_{\bar{y}} \right) \delta v_{\bar{x}} - \left(W_{\bar{x}} + \frac{1}{2} W_z v_{\bar{x}} \right) \delta v_{\bar{y}} \right]_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

und damit ist die virtuelle Arbeit von \mathfrak{M}_l sowie \mathfrak{M}_0 wenigstens teilweise als Variation eines Potentials dargestellt.

Sind die Momentvektoren $\mathfrak{M}_l, \mathfrak{M}_0$ axial, also

$$W_{xl} = W_{yl} = W_{\bar{x}0} = W_{\bar{y}0} = 0, \quad W_z = W,$$

so reduzieren sich die beiden Randterme in (3.11) auf

$$-\frac{1}{2} W (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l,$$

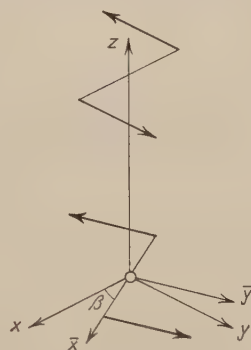


Fig. 5
Belastung durch
gegeneinander verdrehte
Kräftepaare.

und da sich dieser Ausdruck, solange δv_x und δv_y von Null verschieden sein können, nicht als Variation einer Funktion von v_x, v_y schreiben läßt, ist das Problem – wie bereits in [2] festgestellt – nur bei eingespannten Enden (Knickfälle I und II) konservativ.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *tangential*, so ist

$$W_{xl} = W v_{xl}, \quad W_{yl} = W v_{yl}, \quad W_{\bar{x}0} = -W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = -W v_{\bar{y}0}, \quad W_z = W,$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) in

$$\frac{1}{2} W (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l$$

übergehen, gilt hier dasselbe; insbesondere sind auch jetzt die Knickfälle III bis V nichtkonservativ.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *semitangential*, so ist nach (2. 7)

$$W_{xl} = \frac{1}{2} W v_{xl}, \quad W_{yl} = \frac{1}{2} W v_{yl}, \quad W_{\bar{x}0} = -\frac{1}{2} W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = -\frac{1}{2} W v_{\bar{y}0},$$

$$W_z = W,$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) sämtlich verschwinden, sind die semitangentialen Momente unabhängig von den kinematischen Randbedingungen konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz, \quad (3. 12b)$$

und ihre virtuelle Arbeit wird hieraus (unter Durchführung einer partiellen Integration) mit

$$\delta A_W = -\delta V_W = W \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_x \delta v_y - v_y \delta v_x)_0^l \quad (3. 13b)$$

gewonnen.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *quasitangential*, so ist nach (2. 3)

$$W_{xl} = W v_{xl}, \quad W_{yl} = 0, \quad W_{\bar{x}0} = -W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = 0, \quad W_z = W.$$

Die Randglieder in (3. 11) reduzieren sich also auf

$$-\frac{1}{2} W [(v_y \delta v_x + v_x \delta v_y)_l - (v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} + v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0],$$

und da man hierfür auch

$$-\delta \left[\frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0}) \right]$$

schreiben kann, sind auch die quasitangentialen Momente konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0}) \quad (3.12c)$$

und ihre virtuelle Arbeit

$$\delta A_W = W \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz - W (v_{yl} \delta v_{xl} - v_{\bar{y}0} \delta v_{\bar{x}0}). \quad (3.13c)$$

Sind schließlich \mathfrak{M}_l und \mathfrak{M}_0 *pseudotangential*, so hat man nach (2. 2)

$$W_{xl} = W (v_{xl} + v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l), \quad W_{yl} = 0, \quad W_{\bar{x}0} = -W (v_{\bar{x}0} + v_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_0), \quad W_{\bar{y}0} = 0, \\ W_z = W (1 - \varepsilon_l \operatorname{tg} \tau_l) = W (1 - \varepsilon_0 \operatorname{tg} \tau_0),$$

und wenn man, wie es die Beschränkung auf Terme zweiter Ordnung erfordert, hier $W_z = W$ setzt, erhält man aus den Randgliedern in (3. 11)

$$-\frac{1}{2} W [(v_y \delta v_x + v_x \delta v_y)_l - (v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} + v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0 + 2 (v_{yl} \delta v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}0} \delta v_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_0)].$$

Da man hierfür auch

$$-\delta \left[\frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0} + v_{yl}^2 \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}0}^2 \operatorname{tg} \tau_0) \right]$$

schreiben kann, sind auch die pseudotangentialen Momente konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0} + v_{yl}^2 \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}0}^2 \operatorname{tg} \tau_0) \quad (3.12d)$$

und ihre virtuelle Arbeit

$$\delta A_W = W_z \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz - W [v_{yl} (\delta v_{xl} + \delta v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l) - v_{\bar{y}0} (\delta v_{\bar{x}0} + \delta v_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_0)]. \quad (3.13d)$$

Durch Zusammenfassen sämtlicher Ergebnisse erhält man endlich

Satz 4. Semi-, quasi- und pseudotangentialen Momente sind im Gegensatz zu den axialen und tangentialen stets konservativ.

Auf Grund dieses Satzes können Stabilitätsprobleme mit semi-, quasi- und pseudotangentialen Momenten mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriums [4] gelöst werden.

4. Differentialgleichungen und Randbedingungen

Die virtuelle Arbeit sämtlicher inneren und äußeren Kräfte ist durch $\delta A = \delta A_i + \delta A_K + \delta A_W$ gegeben und nimmt, wenn man (3. 3), (3. 6) und (3. 13) addiert, die Form

$$\delta A = \int_0^l (\alpha v_x'' + W v_y' + K_x) \delta v_x dz + \int_0^l (\alpha v_y'' - W v_x' + K_y) \delta v_y dz + \int_0^l \gamma \varepsilon'' \delta \varepsilon dz + R \quad (4. 1)$$

an. Dabei ist mit R der Randterm bezeichnet, der im semitangentialen Fall mit

$$R = - \left\{ \left(\alpha v_x' + \frac{1}{2} W v_y \right) \delta v_x + \left(\alpha v_y' - \frac{1}{2} W v_x \right) \delta v_y + [\gamma (\omega + \varepsilon') - W] \delta \varepsilon \right\}_0^l \quad (4. 2b)$$

im quasitangentialen mit

$$R = - \left\{ (\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + \alpha v_y' \delta v_y \right\}_l + \left\{ (\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + \alpha v_y' \delta v_y \right\}_0 + \left\{ [\gamma (\omega + \varepsilon') - W] \delta \varepsilon \right\}_0^l \quad (4. 2c)$$

und im pseudotangentialen mit

$$R = - \left\{ (\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + (\alpha v_y' + W v_y \operatorname{tg} \tau) \delta v_y \right\}_l + \left\{ (\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + (\alpha v_y' + W v_y \operatorname{tg} \tau) \delta v_y \right\}_0 + \left\{ [\gamma (\omega + \varepsilon') - W_x] \delta \varepsilon \right\}_0^l \quad (4. 2d)$$

einzusetzen ist.

Nach dem statischen Stabilitätskriterium ist die kritische die kleinste Belastung, unter der eine nichttriviale, das heißt mit einer Verbiegung der Stabachse verbundene Gleichgewichtslage existiert. In dieser muß die virtuelle Arbeit δA für jede passende, das heißt mit den kinematischen Randbedingungen verträgliche Verschiebung verschwinden. Hieraus folgt erstens, daß die spezifische Verdrehung ε' konstant ist, und zwar hat sie im semi- und quasitangentialen Fall zufolge (3. 1) und (4. 2) den Wert Null, während sie im pseu-

dotangentialen Fall von Null verschieden sein kann. Zweitens erhält man für die Verbiegung die Differentialgleichungen

$$\alpha v_x'' + W v_y' + K_x = 0, \quad \alpha v_y'' - W v_x' + K_y = 0 \quad (4.3)$$

und für diejenigen Enden, an denen v_x, v_y frei, der Stab also nicht eingespannt ist, im semitangentialen Fall die Randbedingungen

$$\alpha v_x' + \frac{1}{2} W v_y = 0, \quad \alpha v_y' - \frac{1}{2} W v_x = 0, \quad (4.4b)$$

im quasitangentialen

$$\alpha v_{xl}' + W v_{yl} = 0, \quad v_{yl}' = 0 \quad (4.4c)$$

beziehungsweise

$$\alpha v_{\bar{x}0}' + W v_{\bar{y}0} = 0, \quad v_{\bar{y}0}' = 0 \quad (4.5c)$$

und im pseudotangentialen

$$\alpha v_{xl}' + W v_{yl} = 0, \quad \alpha v_{yl}' + W v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l = 0 \quad (4.4d)$$

beziehungsweise

$$\alpha v_{\bar{x}0}' + W v_{\bar{y}0} = 0, \quad \alpha v_{\bar{y}0}' + W v_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_0 = 0. \quad (4.5d)$$

Die Differentialgleichungen (4.3) sowie die dynamischen Randbedingungen (4.4), (4.5) lassen sich auch direkt dadurch erhalten, daß man unter Berücksichtigung der Neigung der elastischen Linie die beiden Biegemomente bestimmt und gleich $\alpha v_x'$ bzw. $\alpha v_y'$ setzt. Sie sind noch durch die kinematischen Randbedingungen, nämlich die an eingespannten Enden gültigen Beziehungen

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad (4.6)$$

sowie die Forderungen

$$K_x = 0, \quad K_y = 0 \quad (4.7)$$

beziehungsweise

$$\int_0^l v_x dz = 0, \quad \int_0^l v_y dz = 0 \quad (4.8)$$

zu ergänzen, je nachdem das obere Ende frei verschieblich oder seitlich geführt ist.

Die weitere Behandlung erfolgt zweckmäßig komplex, und zwar dadurch, daß man

$$v_x + i v_y = v, \quad K_x + i K_y = K \quad (4.9)$$

setzt und die Abkürzungen

$$\frac{W}{\alpha} = w, \quad \frac{K}{\alpha} = c \quad (4.10)$$

einführt. Die Differentialgleichungen (4. 3) lassen sich nämlich auf diese Weise mit

$$v'' - i w v' + c = 0 \quad (4. 11)$$

zusammenfassen, die Randbedingungen (4. 4) bis (4. 8) mit

$$v' - \frac{1}{2} i w v = 0, \quad (4. 12b)$$

$$v'_{x_l} + w v_{y_l} = 0, \quad v'_{y_l} = 0, \quad (4. 12c)$$

$$v'_{\bar{x}_0} + w v_{\bar{y}_0} = 0, \quad v'_{\bar{y}_0} = 0, \quad (4. 13c)$$

$$v'_{x_l} + w v_{y_l} = 0, \quad v'_{y_l} + w v_{y_l} \operatorname{tg} \tau_l = 0, \quad (4. 12d)$$

$$v'_{\bar{x}_0} + w v_{\bar{y}_0} = 0, \quad v'_{\bar{y}_0} + w v_{\bar{y}_0} \operatorname{tg} \tau_0 = 0, \quad (4. 13d)$$

$$v = 0, \quad (4. 14)$$

$$c = 0, \quad (4. 15)$$

$$\int_0^l v \, dz = 0. \quad (4. 16)$$

In den nächsten Abschnitten sollen mit Hilfe dieser Beziehungen die kritischen Momente in den Knickfällen I bis V (Tafel 2) ermittelt werden, jetzt aber (im Gegensatz zu Tafel 1) unter der Annahme einer semi-, quasi- bzw. pseudotangentialen Einleitung des Torsionsmomentes. Da an nichteingespannten Enden je nach der Art des Kraftangriffs verschiedene Randbedingungen zu verwenden sind, gilt – unter dem Vorbehalt seiner Bestätigung in den Abschnitten 5, 6 und 8 –

Satz 5. Der Betrag des kritischen Momentes in einem bestimmten Knickfall hängt im allgemeinen davon ab, ob es axial, tangential, semi-, quasi- oder pseudotangential angenommen wird.

In den Knickfällen I und II, in denen beide Enden eingespannt sind, ist freilich das Knickmoment bei tangentialer, semi- und quasitangentialer Belastung dasselbe wie bei axialer, während aber mit Rücksicht auf (2. 1) bei pseudotangentialer Belastung auch hier ein neuer Wert zu erwarten ist.

5. Knickung durch ein semitangenciales Moment

Da das Stabilitätsproblem nach Abschnitt 3 konservativ, das Knickmoment mithin sicher von Null verschieden ist, darf man in (4. 11) $w \neq 0$ voraussetzen und erhält dann mit

$$v = A e^{i w z} - i \frac{c}{w} z + B \quad (5. 1)$$

die allgemeinste Lösung, die noch drei unbekannte komplexe Konstanten A , B und C enthält.

Im *Knickfall IIIb*, der sich von IIIa (Tafel 1) nur in der Neigung von \mathfrak{B} unterscheidet, reduziert sich (5. 1) zufolge der am unteren Ende gültigen Randbedingung (4. 14) sowie (4. 15) auf

$$v = A (e^{i w z} - 1). \quad (5. 2)$$

Die für das obere Ende formulierte Randbedingung (4. 12b) führt alsdann auf die Eigenwertgleichung $\exp(i w l) = -1$ mit den absolut kleinsten Wurzeln $w = \pm \pi/l$, nach (4. 10) also auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \pi \frac{\alpha}{l}. \quad (5. 3)$$

Im *Knickfall IVb* führt die für das untere Ende formulierte Randbedingung (4. 14) zusammen mit (4. 16) auf

$$v = A \left[e^{i w z} + \frac{2}{l} \left(1 - \frac{e^{i w l} - 1}{i w l} \right) z - 1 \right] \quad (5. 4)$$

und die Randbedingung (4. 12b) für das obere Ende mit

$$w l = W \frac{l}{\alpha} = u \quad (5. 5)$$

auf die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = \frac{u}{2} + \frac{2}{u},$$

der man $u/2 = \pm 3,406$ und damit das Knickmoment

$$W_k = \pm 6,812 \frac{\alpha}{l} \quad (5. 6)$$

entnimmt.

Im *Knickfall Vb* liefert die Randbedingung (4. 16) zunächst

$$v = A \left(e^{i w z} - \frac{2}{l} \cdot \frac{e^{i w l} - 1}{i w l} z \right) - B \left(\frac{2}{l} z - 1 \right) \quad (5. 7)$$

und die für beide Enden formulierte Randbedingung (4. 12b) mit (5. 5)

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u_1}{2} = 0.$$






Hieraus gewinnt man $u/2 = \pm 2,456$ und hat somit

$$W_k = \pm 4,912 \frac{\alpha}{l}. \quad (5. 8)$$

Die hier unterdrückte Rechnung für die Knickfälle I und II bestätigt die für ein axiales Moment erhaltenen Resultate. Sie sind mitsamt den neuen¹⁾ in Tafel 2 zusammengestellt, und zwar ist $k = u/\pi$ der in die Greenhillsche Formel (1. 1) einzusetzende Zahlenfaktor.

Tafel 2

Knickfaktor k bei axialer, semi-, quasi- und pseudotangentialer Belastung

Knickfälle	I	II	III	IV	V
Randbed.					
(a) axiales Moment	2,861	2	0	0	2
(b) semitang. Moment	2,861	2	1	2,168	1,564
(c) quasitang. Moment	2,861	2	0,5	1,576	$\beta=0: 1$ $\beta=\frac{\pi}{2}: 1,021$
(d) pseudotang. Moment	∞	∞	∞	∞	$\beta=0: \infty$

6. Knickung durch ein quasitangentiales Moment

Um das Knickmoment auch in den quasitangentialen Fällen zu ermitteln kann man an die Lösungen (5. 2), (5. 4) und (5. 7) anknüpfen, die aber jetzt – da sich die noch nicht verwendeten Randbedingungen (4. 12c), (4. 13c) nicht komplex schreiben lassen – unter Zerlegung der Konstanten gemäß $A = A_x + i A_y$, $B = B_x + i B_y$ in ihre Real- und Imaginärteile aufgespalten werden müssen.

Im Knickfall IIIc führt (5. 2) mit der Randbedingung (4. 12c) zusammen auf die Eigenwertgleichung $\cos(w l) = 0$ und damit auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{l}. \quad (6. 1)$$

¹⁾ Die genauere Berechnung sämtlicher Zahlenwerte verdanke ich – wie auch die Kontrolle der übrigen Resultate – Herrn U. HOCHSTRASSER, dipl. Phys. ETH.

Im *Knickfall IVc* hat man (5.4) analog zu behandeln und kommt mit (5.5) auf die Eigenwertgleichung

$$\left(\frac{u^4}{4} + 2\right) \cos u + 2u \sin u - u^2 - 2 = 0.$$

Die absolut kleinsten, von Null verschiedenen Wurzeln derselben sind $u = \pm 4,952$, das Knickmoment mithin

$$W_k = \pm 4,952 \frac{\alpha}{l}. \quad (6.2)$$

Im *Knickfall Vc* enthält die Eigenwertgleichung, die mit (4.12c) und (4.13c) aus (5.7) gewonnen wird, den Winkel β , um den (Figur 5) die beiden belastenden Kräftepaare gegeneinander verdreht sind. Sie lautet mit (5.5)

$$u^3 \sin u \cos^2 \beta + \left[\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2\right) \sin u + (u^3 - 2u) \cos u + 2u\right] \cos \beta \sin \beta \\ + \left[\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2 + 2\right) \cos u + 2u \sin u + u^2 - 2\right] \sin^2 \beta = 0.$$

Im praktisch wichtigsten Sonderfall gegeneinander unverdrehter Kräftepaare ($\beta = 0$) reduziert sie sich auf $\sin u = 0$ und ergibt das Knickmoment

$$W_k = \pm \pi \frac{\alpha}{l}. \quad (6.3)$$

Sind andererseits die Paare um einen rechten Winkel gegeneinander verdreht ($\beta = \pi/2$), so erhält man

$$\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2 + 2\right) \cos u + 2u \sin u + u^2 - 2 = 0$$

und hieraus mit $u = \pm 3,207$ das Knickmoment

$$W_k = \pm 3,207 \frac{\alpha}{l}. \quad (6.4)$$

Auch diese Ergebnisse sind – zusammen mit den bekannten in den Knickfällen I und II – in Tafel 2 eingetragen¹⁾. Im übrigen liefert der Vergleich von (6.3) und (6.4) noch den

Satz 6. Bei mehr als einem quasitangentialen Moment hängt die kritische Belastung von der gegenseitigen Lage der Kräftepaare ab.

7. Bindungen und kritische Belastung

In der Theorie der Schwingungen wird gezeigt, daß die kleinste Eigenfrequenz mit zunehmender Anzahl der Bindungen im allgemeinen anwächst,

¹⁾ Sie gelten, wie W.T. KORTER festgestellt hat, in den Fällen I bis IV auch für Wellen, die durch ein Kreuzgelenk auf Torsion beansprucht werden.

keinesfalls aber abnimmt. Mit Rücksicht auf die Analogie, die zwischen Schwingungsaufgaben einerseits und Stabilitätsproblemen bei statischer Behandlung andererseits besteht [4], [9], ist zu erwarten, daß ein ähnlicher Satz ganz allgemein auch für die kritische Belastung gilt. In der Tat zeigt Tafel 2, daß das Knickmoment sowohl bei semitangentialer wie quasitangentialer Belastung von Knickfall III über II bis I, von III bis IV und von V bis IV anwächst, und beim Vergleich der zugehörigen Eulerschen Knicklasten stellt man dasselbe Verhalten fest.

Ein beliebiges konservatives System A , das gewissen Bindungen unterliegt, ist stabil, solange seine potentielle Energie positiv definit, nämlich in einer trivialen Gleichgewichtslage Null und in jeder anderen kinematisch möglichen – das heißt mit den Bindungen verträglichen – Lage größer als Null ist. Dieser Satz liegt [4] dem energetischen Stabilitätskriterium zugrunde. Unterscheidet sich ein zweites System B nur darin von A , daß es neben den Bindungen von A eine oder mehrere weitere starre, das heißt keine Arbeit leistenden Bindungen aufweist, so besitzt es die gleiche potentielle Energie wie A . Solange diese für A positiv definit ist, ist sie es auch für B , da jede kinematisch mögliche Lage von B auch eine solche von A ist; die kritische Belastung von B kann also nicht kleiner sein als diejenige von A . Damit gilt aber allgemein

Satz 7. Die kritische Belastung eines konservativen Systems nimmt beim Hinzufügen von starren, das heißt keine Arbeit leistenden Bindungen im allgemeinen zu, keinesfalls aber ab.

8. Knickung durch pseudotangentialle Momente

Bei der Knickung durch pseudotangentialle Momente treten einige neue Gesichtspunkte auf.

Erstens enthalten die hier erstmals zur Verwendung kommenden Randbedingungen (4. 12d) und (4. 13d) die Drehwinkel τ_l und τ_0 der Endquerschnitte. Diese hängen von der Querschnittsform und von der Querszahl des Materials ab, so daß mit der Möglichkeit von Knickfällen zu rechnen ist, bei denen das kritische Moment und insbesondere der Faktor k in der Greenhillschen Formel (1. 1) Funktionen des Werkstoffes und der Querschnittsform sind.

Zweitens ist daran zu erinnern, daß die in der Differentialgleichung (4. 11) und in verschiedenen Randbedingungen auftretende Konstante $w = W/\alpha$ mit dem Moment W unmittelbar vor dem Ausknicken gebildet ist, das nach (2. 1) und Figur 2 (d) gemäß

$$W = W_0 \cos \tau_l = 2 P a \cos \tau_l$$

aus dem Moment $W_0 = 2 P a$ vor der Belastung bzw. aus der am Querarm angreifenden Kraft P hervorgeht.

Wir dürfen uns im folgenden aus Symmetriegründen auf positive Momente W und damit auch auf positive τ_l beschränken. Als dritte Besonderheit der

pseudotangential Belastung ist dann zu erwähnen, daß der Stab nur ein beschränktes Moment aufnimmt. Da nämlich [wie aus Figur 2 (d) hervorgeht und bereits in Abschnitt 2 vermerkt wurde] $\tau_l < \pi/2$ und für den Drehwinkel am unteren Ende, sofern der Stab hier um die Achse drehbar gelagert und wie oben quasitangential belastet ist, aus Gleichgewichtsgründen $\tau_0 = -\tau_l$, mithin $\tau_0 > -\pi/2$ gilt, bleibt der totale Drehwinkel des Stabes kleiner als $\pi/2$ (bei festem unterem Ende) bzw. π (bei drehbarem unterem Ende), und damit bleibt auch W beschränkt. Jede Vergrößerung der Kräfte \mathfrak{P} , $-\mathfrak{P}$ hat nur eine Abnahme der Paarbreite zur Folge, wodurch eine Steigerung von W bis zum Betrag, der einem totalen Drehwinkel $\pi/2$ bzw. π entspricht, verunmöglicht wird.

Ist τ_l der totale Drehwinkel des Stabes und γ dessen Torsionssteifigkeit, so gilt nach (5. 5)

$$\tau_l = \frac{W}{\gamma} l = \frac{\alpha}{\gamma} w l = \frac{\alpha}{\gamma} u.$$

Führt man hier mit E , G , m , I , I_p , \bar{k} den Elastizitätsmodul, den Schubmodul und die Querszahl, das axiale sowie das polare Trägheitsmoment des Querschnittes und schließlich die für die Querschnittsform typische Konstante¹⁾ ein, die für rotationssymmetrische Profile den Wert 1 hat und für alle anderen größer ist, so gilt

$$\alpha = E I, \quad \gamma = \frac{G I_p}{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m E}{2(m+1)} \cdot 2 I$$

und damit

$$\tau_l = \bar{k} \frac{m+1}{m} u. \quad (8. 1)$$

Ist $\tau_l - \tau_0 = 2 \tau_l$ der totale Drehwinkel, so kommt statt (8. 1)

$$\tau_l = \bar{k} \frac{m+1}{m} \cdot \frac{u}{2}. \quad (8. 2)$$

Da

$$\tau_l < \frac{\pi}{2} \quad (8. 3)$$

ist, sind nach (8. 1) bzw. (8. 2) größere Werte von u , nämlich solche, die der Ungleichung

$$u < \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad u < \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m}{m+1} \pi \quad (8. 4)$$

widersprechen, nicht realisierbar, und wenn die kleinste positive Wurzel der Eigenwertgleichung der einen oder anderen Ungleichung (8. 4) nicht genügt, tritt überhaupt kein Knicken ein; es ist also $W = \infty$. Somit gilt

¹⁾ Vergleiche C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 549.

Satz 8. Bei pseudotangentialer Belastung kann der Stab unabhängig von ihrer Größe knickfest sein.

Dieser Satz bildet das Gegenstück zu der in Abschnitt 1 besprochenen, von II' unabhängigen Labilität unter einem axialen Moment.

Mit der Tatsache, daß die Randbedingungen (4. 12d) und (4. 13d) die Winkel τ_l bzw. τ_0 enthalten, hängt eine vierte Besonderheit des pseudotangentialen Problems zusammen, nämlich die Notwendigkeit, die mit I bis V bezeichneten Knickfälle weiter zu unterteilen. Die Fälle I und II (vgl. Tafel 2)

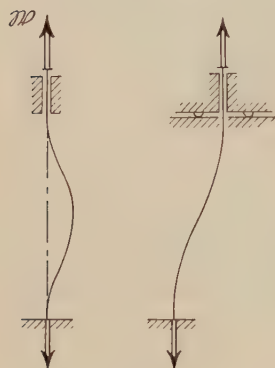


Fig. 6

Lagerung an
"eingespannten" Enden.

lassen sich allgemein nur dadurch verwirklichen, daß man sich mindestens einen der beiden Einspannkörper, beispielsweise den oberen, um die Achse drehbar (und im Fall II auch translatorisch verschieblich) denkt. Damit erhält die Axialkomponente von \mathfrak{B} am betreffenden Ende den Charakter einer Last (im Gegensatz zu einer Reaktion), und die Randbedingungen würden besser durch ein langes Lager (Figur 6) dargestellt. In dieser Weise kann man aber auch die Einspannung am unteren Ende oder diejenige in den Knickfällen III und IV modifiziert denken, und da sich dabei die bisher verwendeten Randbedingungen nicht ändern, ist diese Modifikation bei axialer, tangentialer, semi- oder quasitangentialer Belastung bedeutungslos. Im pseudotangentialen Fall dagegen kommt der von u

abhängige Winkel τ_l in den Randbedingungen (4. 12d) [und τ_0 in (4. 13d)] vor. Da er eine obere Schranke besitzt, muß in den Knickfällen I und II mit neuen Ergebnissen gerechnet werden. Da ferner sein Zusammenhang mit u , je nachdem nur ein Ende drehbar ist oder beide, durch (8. 1) oder (8. 2) gegeben wird, besteht die Möglichkeit verschiedener Knickmomente bei beiden Varianten ein und desselben Knickfalles. Wir wollen diese Varianten dadurch unterscheiden, daß wir die Belastung bei festem unterem Ende *einseitig*, bei drehbarem dagegen *beidseitig pseudotangential* nennen. Im Knickfall V ist übrigens aus praktischen Gründen nur die beidseitig pseudotangential Belastung von Bedeutung.

Im Knickfall IIIId kann man an die Lösung (5. 2) anknüpfen und erhält, wenn man sie noch den Randbedingungen (4. 12d) anpaßt, die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_l = 0. \quad (8. 5)$$

Nach (8. 1) und (8. 2) ist auf alle Fälle $\tau_l > u/2$, so daß man unter Berücksichtigung von (8. 3)

$$0 < \frac{u}{2} < \tau_l < \frac{\pi}{2} \quad (8. 6)$$

hat. Dieser Einschränkung zufolge ist aber

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_l > \operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 (u/2)}{2 \operatorname{tg} (u/2)} + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1}{\sin u},$$

und da nach (8. 6) $1/\sin u > 0$ ist, die Eigenwertgleichung also im fraglichen Intervall keine Lösung besitzt, gilt sowohl bei ein- wie bei beidseitig pseudotangentialer Belastung

$$W_k = \pm \infty. \quad (8. 7)$$

Die *Knickfälle Id, IId* und *IVd* erledigen sich ohne Rechnung; auf Grund von Satz 7 gilt (8. 7) auch für sie, und zwar in beiden Unterfällen.

Im *Knickfall Vd* knüpft man an die Lösung (5. 7) an, die noch den Randbedingungen (4. 12d) sowie (4. 13d) zu unterwerfen ist. Beschränkt man sich dabei auf den Fall im unbelasteten Zustand paralleler Querarme, indem man in Figur 5 $\beta = 0$ setzt und die Querstriche in (4. 13d) wegläßt, so kommt man mit der Abkürzung

$$\operatorname{tg} \tau_l = t > 0$$

auf die Eigenwertgleichung

$$(u + 2t - ut^2) \sin u - 2t(u + t) \cos u + 2t^2 = 0,$$

die man mit

$$g(u) = 2(1 - \cos u) - u \sin u$$

auch in der Form

$$f(u) = t^2 g(u) + 2t g'(u) + u \sin u = 0$$

anschreiben kann. Da u und t positiv vorausgesetzt werden durften und die Entwicklung $g(u) = u^4/12 \dots$ gilt, ist $f(u)$ für kleine u positiv. Da aber nach (8. 6) $0 < u < \pi$ ist und, wie man durch Ableiten feststellt, $g'(u)$ und $g''(u)$ in diesem Intervall größer als Null sind, gilt $f(u) > 0$ im ganzen Intervall. Hieraus folgt, daß das Knickmoment auch in beiden Unterfällen von Vd durch (8. 7) gegeben ist.

Auch diese Resultate, die alle unabhängig vom Werkstoff und von der Querschnittsform sowie für ein- und beidseitig pseudotangential Belastung gelten, sind in Tafel 2 eingetragen.

9. Schlußbemerkungen

Der Vergleich der in Tafel 2 zusammengestellten Resultate zeigt, daß die Knickgefahr von der Art abhängt, wie das Torsionsmoment eingeleitet wird. Er bestätigt damit Satz 5 und gibt im übrigen zu folgenden Bemerkungen Anlaß:

a) Durch pseudotangentiale Momente läßt sich ein Stab der hier betrachteten Art in den Fällen I bis V (im Fall V jedenfalls unter der Voraussetzung $\beta = 0$) nicht knicken.

b) In den Fällen I und II stimmt das semi- und das quasitangentiale Knickmoment mit dem axialen überein; hier gilt also – vom pseudotangentialen Fall abgesehen – die Greenhillsche Formel in der von E. L. NICOLAI [8] für I und von A. G. GREENHILL [1] für II angegebenen Form.

c) In den Fällen III bis V, in denen sich das semi- und das quasitangentiale Knickmoment unterscheiden, ist das erste größer als das zweite. Die Knickgefahr nimmt also – sonst gleiche Verhältnisse vorausgesetzt – allgemein von der pseudotangentialen Belastung über die semitangentiale bis zur quasitangentialen zu.

d) Im Fall V ist das von A. G. GREENHILL [1] berechnete Knickmoment (vgl. Abschnitt 1) bei axialer Belastung durch A. TRÖSCH [7] bestätigt; bei semi- oder quasitangentialer Belastung unterschätzt es die Knickgefahr.

e) Die Greenhillschen Ergebnisse sind – vor allem im Fall V – nach verschiedenen Richtungen erweitert worden ([1], [2], [10] bis [14]), nämlich durch Einbezug einer Druckkraft, durch Verallgemeinerung auf Stäbe mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten und durch Übertragung auf die Schraubenfeder sowie auf das Problem der kritischen Drehzahlen. Auch diese Erweiterungen bedürfen unter der Annahme einer semi-, quasi- oder pseudotangentialen Einleitung des Torsionsmomentes gewisser Korrekturen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. G. GREENHILL, *On the Strength of Shafting when Exposed Both to Torsion and End Thrust*, Proc. Inst. Mech. Engin. 182 (1883).
- [2] H. ZIEGLER, *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*, ZAMP 2, 265 (1951).
- [3] H. ZIEGLER, *Zum Begriff des konservativen Systems*, Elemente Math. (erscheint demnächst).
- [4] H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing. Arch. 20, 49 (1952).
- [5] A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1950), S. 67.
- [6] H. ZIEGLER, *Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem*, Z. angew. Math. Mech. 31, 265 (1951).
- [7] A. TRÖSCH, *Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen*, Dissertation ETH. (erscheint demnächst).
- [8] E. L. NICOLAI, *Über die Stabilität des zu einer Schraubenlinie gebogenen und gedrehten Stabes*, Z. angew. Math. Mech. 6, 30 (1926).
- [9] E. STIEFEL und H. ZIEGLER, *Natürliche Eigenwertprobleme*, ZAMP 1, 111 (1950).
- [10] R. GRAMMEL, *Das kritische Drillungsmoment von Wellen*, Z. angew. Math. Mech. 3, 262 (1923); siehe auch C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 540.
- [11] C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 552.

- [12] J. A. HARINGX, *On the Buckling and Lateral Rigidity of Helical Springs*, Proc. Nederl. Akad. Wet. 45, 533 und 650 (1942); vgl. auch Philips Res. Rep. 3, 401 (1948) und 4, 49 (1949).
- [13] H. ZIEGLER und A. HUBER, *Zur Knickung der gedrückten und tordierten Schraubenfeder*, ZAMP 1, 189 (1950).
- [14] R. GRAMMEL, *Der Einfluß der Wellentorsion auf die kritische Drehzahl*, Stodola-Festschrift (Orell-Füßli, Zürich und Leipzig 1929), S. 180; vgl. auch C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 796.

Summary

Stability problems concerning thin rods and shafts subjected to torsion and thrust are usually treated under the assumption that during deflection the moment vectors of the external couples remain parallel to the axis. In consequence of this rather questionable assumption these problems are nonconservative; in some very simple buckling cases the critical load is found to be zero, and in numerous problems of critical speed every angular velocity results to be critical.

It seems more appropriate to assume that the vectors of the forces contributing to the external moments retain their directions. Then, as a rule, the moment vector is inclined, its slope, however, differing from that of the deflection curve and depending on the manner in which the forces are applied. Under this assumption the problem is conservative and yields new (in some cases even arbitrarily high) values for the critical load.

As a first application the buckling moments are recalculated for a prismatic rod with two equal flexural rigidities, subjected to torsion under various end conditions.

(Eingegangen: 27. 8. 1951.)

Zur Theorie des Magnetronverstärkers

VON FRITZ LÜDI, Baden¹⁾

Einleitung

Im folgenden wird dargelegt, wie nach den Gleichungen einer früheren Untersuchung des Verfassers über das Magnetron²⁾ die Theorie des Magnetronverstärkers in einfachster Weise folgt und für Synchronismus zwischen elektromagnetischer Welle und Elektronenwelle dieselben Resultate wie die Arbeit von BROSSART und DÖHLER³⁾ ergibt. Darüber hinaus führt eine Diskussion dieser Gleichungen auf die Möglichkeit der Verstärkung, wenn die Elektronenwelle langsamer als die elektromagnetische Welle läuft. Dieser Untersynchronismus ist physikalisch deshalb möglich (im Gegensatz zur Travelling-Wave-

¹⁾ Brown, Boveri & Cie., Baden.

²⁾ F. LÜDI, Helv. Phys. Acta 16, 59 (1943) [mit I bezeichnet].

³⁾ J. BROSSART und O. DÖHLER, Ann. Radioélectr. 3, 328 (1948)

Tube¹⁾, weil die Elektronen nach dem Durchlaufen der feldstarken Zone zwischen den Segmenten, respektive in der Nähe der Helix, immer wieder in feldschwache Zonen untertauchen und sich deshalb die Wechselwirkung von Feld und Elektronen bei Schlupf nicht aufhebt (Figur 1).

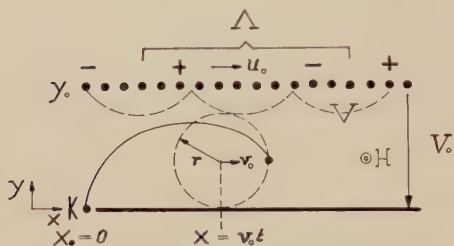


Fig. 1

Schema des Magnetronverstärkers. Die Helix ist als flache «Wendel» ausgebildet, gegenüber die Leitelektrode, welche die an der Kathode K emittierten Elektronen längs der Verzögerungsleitung führt.

Das Wesentliche der zitierten Arbeit I ist das mit rechnerischer Analyse entworfene Bild für den ebenen Fall, wonach unter der Wirkung der y -Komponente des mitlaufenden Drehfeldes eine *synchron* mitlaufende Elektronenfokussierung an den Stellen stattfindet, wo die x -Komponente des Drehfeldes die Elektronen unter Energieabgabe an dieses auf die Anode bewegt (Figur 2

in I). Das gegenlaufende Drehfeld, welches das mitlaufende zum wirklich vorhandenen Wechselfeld ergänzt, wurde dort nicht betrachtet. Damit war eigentlich die Theorie des Magnetrons auf die Theorie des Magnetronverstärkers zurückgeführt, allerdings ohne daß der Verfasser damals die Konsequenz der Realisierung gezogen hatte. In einer späteren Arbeit²⁾ wurde dann auch das gegenlaufende Drehfeld und der Nichtsynchronismus untersucht, der schon in I angedeutet ist. Dies führte zu gewissen Bedingungen und Aussagen, welche im folgenden noch benützt werden.

Es bleibt jetzt noch übrig, zu zeigen, daß die Gleichungen in I mit der Rückwirkung der Elektronenfokussierung auf den Kreis (die Helix) den analytischen Ausdruck für die Verstärkung gibt. Dies geschieht in enger Anlehnung an eine weitere Publikation³⁾ über die Travelling-Wave-Tube; damit ergibt sich auch der direkte Vergleich zwischen den beiden Verstärkern.

Die Methode des gemeinsamen Lösungsansatzes (PIERCE) schließt eine Behandlung des Untersynchronismus aus und erfordert eine spezielle Diskussion. Der Untersynchronismus wird für kürzeste Wellen von Interesse, da die Wellenlänge des Wanderfeldes um den Verzögerungsfaktor (etwa $1/10$) kleiner ist. Der damit verbundene Nachteil kleiner Eindringtiefe und Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl wird behoben durch kleineren Verzögerungsfaktor, also Verzicht auf Synchronismus.

¹⁾ Während der Drucklegung ist mir eine Arbeit von S. MILLMAN, Proc. I. R. E. 39, 1035 (1951) bekannt geworden, nach welcher auch Untersynchronismus bei einer Travelling-Wave-Tube spezieller Konstruktion für 6 mm möglich ist; die Konstruktion ist so gemacht, daß die Elektronen ähnlich wie hier immer wieder in feldfreie Zonen untertauchen.

²⁾ F. LÜDI, Helv. Phys. Acta 19, 3 (1946) [mit II bezeichnet].

³⁾ W. FREY und F. LÜDI, ZAMP 1, 237 (1950) [mit III bezeichnet].

1. Der Elektromechanismus

In I wurden aus einem Wanderfeld mit dem Potential V zwischen Anode (Helix) und Kathode (oder Leitelektrode)

$$V = s(y) \sin\left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t\right), \quad s(y) = \gamma V_0 \frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{A} y\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{A} y_0\right)} \quad (1)$$

die Störungskräfte (Fokussierungskräfte), als Mittelwerte über eine Rollkreisperiode im bewegten Bezugssystem

$$x = x_0 + v_0 t + \xi,$$

abgeleitet

$$\left. \begin{aligned} K_y &= \frac{e}{m} \gamma \frac{2\pi}{A} V_0 \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{A} y\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{A} y_0\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right) = \frac{e}{m} E_y \sin\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right), \\ K_x &= \frac{e}{m} \gamma \frac{2\pi}{A} V_0 \frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{A} y\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{A} y_0\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right) = \frac{e}{m} E_x \cos\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(Es bedeuten [vgl. Figur 1]: γV_0 Amplitude des Wechspotentials als Bruchteil γ vom Gleichpotential V_0 , A Wellenlänge des Wanderfeldes, r Rollkreisradius der Zykloidenbewegung der Elektronen, x_0 räumliche Startphase, $v_0 = V_0/(\gamma_0 \cdot H/c)$ Rollkreisgeschwindigkeit, t Elektronenlaufzeit.) Damit ergaben sich die gestörten Elektronenbewegungen zu

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \frac{v_0}{\omega_0} = r, \\ y &= y_1 + y_2, \quad y_1 = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \xi_2 &= \frac{K_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{K_y}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t + \frac{K_y}{\omega_0} t, \\ y_2 &= \frac{K_y}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{K_x}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{K_x}{\omega_0} t, \\ \omega_0 &= \frac{e}{m} \cdot \frac{H}{c} = \text{Rollfrequenz.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wir machen jetzt einige Umformungen, um den Anschluß an die Behandlung für die Travelling-Wave-Tube zu bekommen.

1. Alle Elektronen starten an der Stelle $x_0 = 0$, aber zu verschiedenen Zeiten t_s . Aus der Form des Drehfeldes, wo jetzt statt der Laufzeit t die Zeit

$T = t_s + t$ eingeführt wird, geht wie in I hervor, daß die Phase des Drehfeldes an der Stelle $x_0 = 0$ zur Zeit $T = -t_s$ dieselbe ist wie an der Stelle x_0 zur Zeit $T = 0$, das heißt $(2\pi/\lambda) x_0 = -\omega t_s$.

2. Mit Berücksichtigung, daß jetzt für den Rollkreismittelpunkt gilt

$$x = v_0 t$$

und deshalb

$$-\omega t_s = \omega t - \omega T = \frac{\omega}{v_0} x - \omega T$$

ist, werden die Ausdrücke für die «Kraft»-Wellen

$$\left. \begin{aligned} K_y &= \frac{e}{m} E_y \sin(-\omega t_s) = \frac{e}{m} E_y \sin\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right), \\ K_x &= \frac{e}{m} E_x \cos(-\omega t_s) = \frac{e}{m} E_x \cos\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Mit Rücksicht auf den späteren Exponentialansatz zur Lösung der Differentialgleichungen gehen wir schon hier zur exponentiellen Schreibweise über und setzen

$$K_y = -j \frac{e}{m} E_y e^{j\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right)},$$

$$K_x = \frac{e}{m} E_x e^{j\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right)}.$$

Man beachte, daß die Symbole K_y , K_x von jetzt an eine etwas andere Bedeutung haben.

Es folgt mit (2)

$$\frac{K_y}{K_x} = -j \frac{E_y}{E_x} = -j \operatorname{ctgh} \left(\frac{\omega}{u_0} r \right)$$

($2\pi/\lambda$ ist durch ω/u_0 ersetzt).

Diese Gleichung ist statthaft, weil bei der Division die Exponentialfaktoren sich wegheben (gleiche Frequenz und gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit der K_y - und K_x -Wellen).

Damit kann E_y bzw. K_y durch das elektrische Längsfeld E_x (im weiteren mit E bezeichnet) ausgedrückt werden

$$K_y = -j \operatorname{ctgh} \left(\frac{\omega}{u_0} r \right) \frac{e}{m} E e^{j\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right)}, \quad E = \gamma \frac{\omega}{u_0} V_0 \frac{\sinh\left(\frac{\omega}{u_0} r\right)}{\sinh\left(\frac{\omega}{u_0} y_0\right)}.$$

Die Mittelwertsbildung über einen Rollkreis kommt dadurch zum Ausdruck, daß die y -Abhängigkeit verschwindet; der Rollkreismittelpunkt $y = r$ und die Startphase sind allein maßgebend.

Aus den Koordinaten (3) folgt nun für die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons in der x -Richtung

$$v_0 + v ,$$

wobei der Wechselanteil v mit genügender Näherung durch

$$v = \dot{\xi}_2 = \frac{K_v}{\omega_0} = -j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{u_0} r\right) \frac{e}{m} E e^{\Gamma_0 x} e^{pT}, \quad \Gamma_0 = j \frac{\omega}{v_0}, \quad p = -i \omega \quad (5)$$

gegeben ist, da wir von der raschen Oszillation der beiden ersten Glieder absehen.

2. Die Gleichungen für den Elektronenstrahl und für die Helix

Nun können wir den Anschluß an die Travelling-Wave-Tube machen und übernehmen dazu die Gleichungen aus III. Zu der Bewegungsgleichung (5) kommen die linearisierte Stromgleichung und die Kontinuitätsgleichung

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 v + v_0 \varrho - i &= 0, \quad i' + \dot{\varrho} = 0, \quad v = -j a E, \\ a &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{u_0} r\right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für einen Moment sei die Abhängigkeit von x und T in E gedacht; Index 0 bedeutet Gleichstromanteil, Punkt Differentialquotient nach der Zeit, Strich nach der Koordinate x . Das zweidimensionale Problem ist jetzt auf ein eindimensionales in der x -Richtung zurückgeführt¹⁾; das Gleichungssystem unterscheidet sich von dem der Travelling-Wave-Tube [Gleichungen (4), (5) und (6) in III] lediglich durch die Bewegungsgleichung, welche hier um eine Ordnung niedriger ist.

Aus diesem Gleichungssystem könnte der dichtemodierte Elektronenstrom aus dem Feld berechnet werden. Doch suchen wir simultane Lösungen unter der influenzierenden Rückwirkung des modulierten Elektronenstromes auf die Helix, für welche nach III das Gleichungssystem

$$C \dot{V} - I' - I'_1 = 0, \quad L \dot{I} - V' = 0, \quad L dx \dot{I} - dV_1 = 0 \quad (7)$$

mit demselben Ersatzschema (III, Figur 1, L Induktivität, C Querkapazität, C_l Längskapazität pro Länge 1) maßgebend ist. Dazu die Kopplungsgleichungen

$$I_1 = \alpha i + C_l \dot{E}, \quad dV_1 = E dx. \quad (8)$$

¹⁾ Diese Behandlung, welche mit Erfolg auf die Berechnung des elektronischen Leitwertes (negativer Anschwingwiderstand) bei Dioden, Trioden, Klystrons geführt hat (eindimensional) versagt beim Magnetron, weil die Zykloiden sich durchkreuzen. Dadurch wird die hydrodynamische Behandlung verunmöglicht, weil der Geschwindigkeitsvektor eines Raumelementes sich nicht als eindeutige Ortsfunktion darstellen läßt. Obige Behandlung ist jedoch gerechtfertigt, weil nur die Fokussierung des Rollkreismittelpunktes berücksichtigt wird.

Das Längspotential dV_1 ist durch den in Abschnitt 1 betrachteten mittleren E -Wert gegeben. Der Proportionalitätsfaktor α trägt auch hier der Wirkung des Wechselanteils des Elektronenstromes auf die besondere räumliche Verteilung des Längsfeldes (Streukapazität) Rechnung.

3. Die charakteristische Gleichung des Systems und ihre Lösung

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems (6), (7), (8) durch Exponentialansatz

$$V, I, (E, i), \varrho, v \sim e^{\Gamma z} e^{i t} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \Gamma_0 + \delta \quad (9)$$

ist nur im Fall von Synchronismus von Elektronengeschwindigkeit v_0 und Wanderfeldgeschwindigkeit u_0 möglich,

$$u_0 = v_0.$$

Der Zusatz δ trägt der Rückwirkung des Elektronenstroms auf die Helix Rechnung.

Mit diesem Ansatz folgt nun aus (6) wie in III für den aus dem Feld E modulierten Elektronenstrom

$$i = \frac{-j a \varrho_0 \dot{p}/v_0}{\Gamma - \dot{p}/v_0} E.$$

Durch Umformung von

$$a \varrho_0 = a \frac{i_0}{v_0} = \frac{\frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{\omega_0 v_0} i_0 = \frac{\frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{\frac{e}{m} \cdot \frac{H}{c} \cdot \frac{V_0}{\gamma_0 H/c}} i_0$$

folgt

$$a \varrho_0 = \frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{V_0/\gamma_0} i_0,$$

also

$$i = \frac{-j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{V_0/\gamma_0} \cdot \frac{i_0 \dot{p}/v_0}{\Gamma + \dot{p}/v_0} E. \quad (10)$$

Andererseits wird das durch den Elektronenstrom i influenzierte Feld E nach (7) und (8)

$$E = \frac{-\Gamma^2 \frac{\dot{p} L}{1 + \dot{p}^2 L C_L}}{\Gamma^2 - \frac{\dot{p}^2 L C}{1 + \dot{p}^2 L C_L}} i$$

oder bei Einführung von

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_0 = \frac{p \sqrt{LC}}{\sqrt{1 + p^2 L C_i}} \quad \text{für } i \rightarrow 0$$

$$E = \frac{-\Gamma^2 \Gamma_0^2 / p C}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2} \propto i. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) folgt schließlich die charakteristische Gleichung zur Bestimmung von Γ bzw. von δ

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{i_0}{(V_0/y_0) v_0 C} \cdot \frac{-j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{\Gamma + p/v_0} \cdot \frac{-\Gamma^2 \Gamma_0^2}{(\Gamma + \Gamma_0)(\Gamma - \Gamma_0)}. \quad (12)$$

Zur Lösung wird für die nach rechts laufende Welle der Ansatz

$$\Gamma = \Gamma_0 + \delta = j \frac{\omega}{v_0} x + \delta$$

gemacht und im Zähler wie auch in $\operatorname{ctgh}[(\omega/v_0)r]$ mit genügender Genauigkeit $\Gamma = \Gamma_0$ bzw. ω/v_0 gesetzt. Mit $p = -j\omega$ wird dann aus der charakteristischen Gleichung

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) \omega^3}{2 (V_0/y_0) v_0 C v_0^3} \cdot \frac{i_0}{\delta^2}$$

mit den beiden *reellen* Wurzeln

$$\delta = \pm K, \quad K^2 = \frac{\alpha i_0 \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{2 (V_0/y_0) v_0 C} \cdot \frac{\omega^3}{v_0^3}.$$

Dies ist also der Hauptunterschied zur Travelling-Wave-Tube, wo drei komplexe Wurzeln auftraten, die eine veränderte Phasengeschwindigkeit gegenüber der elektronenstrahlungsfreien Helix ergaben. Hier bleiben die ungestörten Phasengeschwindigkeiten erhalten, weil die Energieabgabe nach I, II senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit erfolgt; die positive Wurzel ergibt den Verstärkungsfaktor. Um den bessern Vergleich mit der Travelling-Wave-Tube zu bekommen, werde K noch umgeformt mit der Setzung wie in III

$$v_0 C = \frac{\varepsilon^2}{Z_0},$$

wo ε das Verhältnis von Phasengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit

$$\varepsilon = \frac{v_0}{C} \quad \text{und} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \omega^2 L C_i}$$

der Wellenwiderstand der Helix ist.

Damit wird

$$K^2 = \frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) \alpha i_0 Z_0}{2 V_0 / y_0 \epsilon^2} \cdot \frac{\omega^3}{v_0^3}. \quad (13)$$

4. Der Verstärkungsfaktor

Entsprechend den zwei Wellen ($\pm K$) gelten die beiden Anfangsbedingungen

$$V_1 + V_2 = V^{\text{sig}}, \quad i_1 + i_2 = 0 \cdot \frac{V_1}{\delta_1} + \frac{V_2}{\delta_2} = 0.$$

Hierbei ist in der Stromgleichung (10) zu berücksichtigen, daß $E_{1,2} = I_0 V_{1,2}$, also (wegen $\delta_2 = -\delta_1$) $V_1 = V_2 = V^{\text{sig}}/2$ ist.

Für die anwachsende Welle erhalten wir also

$$V = \frac{V^{\text{sig}}}{2} e^{j\left(\frac{\omega}{v_0} x - \omega T\right)} e^{+Kx}$$

und daraus mit dem Wert von K , (13), für den Verstärkungsfaktor

$$\mathfrak{B} = \frac{V_{x=l}}{V^{\text{sig}}} = \frac{1}{2} e^{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha i_0 Z_0}{2 V_0 / y_0 \epsilon^2}\right)^{1/2} \frac{\omega^3 l}{v_0^3}}. \quad (14)$$

Daneben sei der entsprechende Ausdruck für die Travelling-Wave-Tube nach III gesetzt

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3} e^{0,866 \left(\frac{\alpha^2 i_0 Z_0}{4 V_0 \epsilon^2}\right)^{1/3} \frac{\omega}{v_0} l}.$$

Der Unterschied rührt also bei gleicher Helix (Z_0) und gleicher Betriebsspannung V_0 vom verschiedenen Elektronenmechanismus her. Daß im Magnetronverstärker α statt α^2 auftritt, ist bedingt durch den expliziteren Ausdruck der fokussierenden Wechselspannung.

5. Diskussion für Nichtsynchronismus, Elektronengeschwindigkeit kleiner als Wanderfeldgeschwindigkeit $v_0 < u_0$

Hier führt der Ansatz (9) als Simultanlösung für Strahl und Welle nicht zum Ziel, weil die Elektronenkräfte K_y , K_x im Bezugssystem der Elektronenrollkreisgeschwindigkeit $v_0 = I_0/(y_0 H/c)$ abgeleitet wurden.

Diese Setzung erlaubte auch die Homogenisierung der Differentialgleichungen für die Elektronenbewegung. Wollte man mit einem Ansatz analog (9) zum Ziele gelangen, so müßten die Kräfte K_y , K_x neu im Bezugssystem u_0 berechnet werden, was mit einem erheblichen Aufwand verbunden sein dürfte.

Wir beschreiten hier den einfacheren Weg der Diskussion der Bewegungsgleichungen, ähnlich wie in I der Wirkungsgrad des Magnetrons abgeleitet wurde. Wenn wir nämlich zeigen können, daß 1. bei Untersynchronismus auch eine Elektronenfokussierung stattfindet, und 2. diese Elektronenanhäufungen Energie an das Wanderfeld abgeben, ist die Möglichkeit der Verstärkung auch für diesen Fall gegeben, allerdings unter Verzicht auf den analytischen Ausdruck für den Verstärkungsfaktor.

Aus (4) entnimmt man das Vorzeichen der fokussierenden Kraft für die verschiedenen Startwinkel ωt_s

$$K_y = -\frac{e}{m} E_y \sin(\omega t_s) \quad \left\{ \begin{array}{l} < 0 \quad (0 < \omega t_s < \pi) \\ > 0 \quad (\pi < \omega t_s < 2\pi) \end{array} \right.$$

das heißt mit

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{K_y}{\omega_0} t, \quad \dot{x} = v_0 - v_0 \cos \omega_0 t + \frac{K_y}{\omega_0}$$

bedeutet dies eine Fokussierung der Elektronen um die Startwinkel

$$\omega t_s = (2n + 1)\pi,$$

weil die früher $[\omega t_s < (2n + 1)\pi]$ gestarteten Elektronen langsamer als die später gestarteten $[\omega t_s > (2n + 1)\pi]$ laufen.

Die Verdünnungen treten an den Startwinkeln

$$\omega t_s = 2n\pi$$

auf. Nun ist weiter ersichtlich, daß nach (4) für die Startwinkel $\omega t_s = (2n + 1)\pi$

$$K_x = -\frac{e}{m} E_x, \quad K_y = 0$$

ist, also mit

$$y = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{K_x}{\omega_0} t$$

an diesen Stellen eine Synchronbewegung der Elektronenpakete in der x -Richtung ($K_y = 0$) und gleichzeitig eine Bewegung in positiver y -Richtung auf die Anode erfolgt. Wir finden nun weiter mit (3), daß die kinetische Energie zu den Zeiten

$$\dot{t} = (2n + 1) \frac{\pi}{\omega_0}$$

das heißt jeweils im Scheitel der Zykloide

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \left(4v_0^2 + \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{E_x^2}{\omega_0^2} \right),$$

also unabhängig von y ist. Dagegen nimmt die potentielle Energie

$$E_{pot} = \frac{e V_0}{y_0} (y_0 - y) = \frac{e V_0}{y_0} \left[y_0 - \frac{2 v_0}{\omega_0} - \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{\omega_0} (2n + 1) \frac{\pi}{\omega_0} \right]$$

mit wachsendem y ab. Das ist nur möglich, wenn die potentielle Energie, statt in kinetische Energie überzugehen, an das Wanderfeld abgegeben wird. Der Wirkungsgrad für den Magnetronverstärker ist daher wie beim Magnetron durch

$$\eta = \frac{y_0 - \frac{2 v_0}{\omega_0}}{y_0}$$

gegeben.

Diese Aussagen gelten nun auch für Untersynchronismus. Der einzige Unterschied ist der, daß die Werte E_y und E_x kompliziertere als (2) sind; aber es tritt dieselbe Abhängigkeit von der Startphase ωt_s wie in (4) auf. In II ist die Rechnung explizit durchgeführt. Die Bedingungen bei Schlupf sind so, daß nach m Rollkreisperioden $m t_0$ das Elektron wieder dieselbe Phase des Wanderfeldes antrifft und daß der Mittelwert für die Kraft über diese Zeit nicht verschwindet; dies führt zu der Bedingungsgleichung für das Verhältnis v_0/u_0

$$\omega \left(1 - \frac{v_0}{u_0} \right) = \kappa \omega_0. \quad (\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Herrn WOLFGANG FREY danke ich auch hier für fördernde Diskussionen.

Summary

The author shows that his earlier work on the theory of the magnetron (Helv. Phys. Acta 16, 59 [1943]) already contains a conception of the mode of operation of the magnetron amplifier and also permits an analytical expression to be established for the amplification factor. In contradistinction to the case of the conventional travelling-wave tube, amplification is also possible when the electron velocity is considerably lower than the velocity of the travelling field.

(Eingegangen: 2. 8. 1951.)

Wärmespannungen und -deformationen im elastischen Körper bei ebener stationärer Wärmeströmung

Von FRITZ SALZMANN, Zürich¹⁾

1. Allgemeines

Einzelne Fälle von Wärmespannungen in elastischen Körpern, wie etwa jene in beheizten Rohren, sind in der Literatur verschiedentlich behandelt worden. Im folgenden sollen aber die Wärmespannungen bei ebener stationärer Strömung allgemein betrachtet werden, unter besonderer Berücksichtigung der Deformation. Wie sich zeigen wird, lassen sich dabei allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten herauschälen, in die sich Sonderfälle, wie etwa die oben-erwähnten, folgerichtig einfügen.

Es wird auch eine allgemeine Methode entwickelt zur Berechnung der Wärmespannungen und der Deformation eines zylindrischen Körpers, unter besonderer Berücksichtigung der Hohlkörper (Rohre) beliebigen Querschnittes.

2. Grundgleichungen für Spannungen und Deformation

Bezeichnungen:

x, y, z	= Koordinaten im räumlichen kartesischen Koordinatensystem,
ϑ	= Temperatur,
β	= linearer Wärmeausdehnungskoeffizient,
E	= Elastizitätsmodul,
ν	= Querkontraktionsbeiwert,
$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	= Schubmodul,
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	= spezifische Dehnungen,
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	= Winkeländerungen,
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	= Normalspannungen,
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	= Schubspannungen,
u_x, u_y, u_z	= Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z ,
λ	= Wärmeleitfähigkeit.

¹⁾ Forschungsabteilung Escher Wyß AG., Zürich

Zwischen Spannung und Deformation wird bei unveränderter Temperatur eine lineare Beziehung vorausgesetzt (Hookesches Gesetz). Bei gleichzeitiger Erwärmung der Körper setzt sich die gesamte Deformation eines Volumenelementes aus zwei Anteilen zusammen:

1. Aus einer durch die Temperaturerhöhung bei spannungsfreien Oberflächen des Elementes hervorgerufenen Verformung und
2. aus einer durch die an den Oberflächen des Elementes angreifenden Spannungen (Figur 1) hervorgerufenen Verformung.

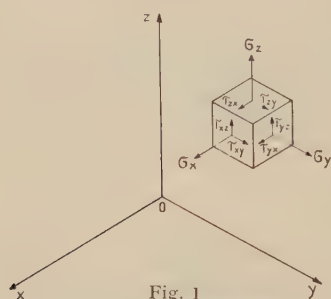


Fig. 1

An einem Volumenelement
angreifende Spannungen.

Der erste Anteil ist eine nach allen Richtungen gleichmäßige Dehnung $\beta \vartheta$, ohne Winkeländerungen, während der zweite Anteil aus Dehnungen ε' und Winkeländerungen γ besteht, die zu den Spannungen proportional sind. Die gesamte Verformung stellt sich in einem kartesischen Koordinatensystem somit folgendermaßen dar:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta \vartheta + \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \beta \vartheta + \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_z - \nu \sigma_x), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \beta \vartheta + \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Dehnungen ε und Winkeländerungen γ sind hierbei in bekannter Weise¹⁾ mit den Verschiebungskomponenten u_x , u_y , u_z durch die folgenden Beziehungen verbunden:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ferner ergibt die Forderung des Gleichgewichtes der an den Oberflächen des Volumenelementes angreifenden Kräfte die bekannten Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Man vergleiche hierzu etwa E. TREFFTZ, *Mathematische Elastizitätstheorie*, in: *Handbuch der Physik*, Bd. 6: *Mechanik der elastischen Körper* (Springer, Berlin 1928).

Diese insgesamt 15 Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der drei Verschiebungskomponenten u_x, u_y, u_z , der sechs Komponenten des Verzerrungstensors $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}/2, \gamma_{xz}/2, \gamma_{zx}/2$ und der sechs Komponenten des Spannungstensors $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ bei vorgegebenem Temperaturverlauf und vorgegebenen Randbedingungen.

3. Ebene Wärmeströmung und ebener Deformationszustand

Die erhaltenen Beziehungen werden nun auf den Fall ebener Wärmeströmung reduziert, wobei ϑ nur eine Funktion der Koordinaten x, y ist. Außerdem wird vorläufig ein ebener Deformationszustand angenommen, also die Verschiebungskomponente $u_z = 0$ gesetzt. Es wird somit angenommen, eine Dehnung in der z -Richtung sei verhindert. In der Axialrichtung eines nach der z -Achse orientierten zylindrischen Körpers werden damit freilich bei Erwärmung Spannungen σ_z auftreten. Eine eventuell geforderte Spannungsfreiheit an den Endflächen kann aber nachträglich durch Anbringen der entgegengesetzten Spannungen erreicht werden. Auf die Lösung dieses rein elastischen Problems wird weiter unten noch eingetreten.

Es wird nun $\varepsilon_z = 0$. Die dritte der Gleichungen (1) erlaubt damit, σ_z durch σ_x und σ_y auszudrücken und aus den ersten beiden Gleichungen zu eliminieren. u_x und u_y sind nur von x und y abhängig. Es wird $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ und $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Man erhält damit die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= (1 + \nu) [E \beta \vartheta + (1 - \nu) \sigma_x - \nu \sigma_y], \\ E \varepsilon_y &= (1 + \nu) [E \beta \vartheta - \nu \sigma_x + (1 - \nu) \sigma_y], \\ E \gamma_{xy} &= 2 (1 + \nu) \tau_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

und dazu für die Spannung σ_z

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y). \quad (7)$$

4. Die stationäre Wärmeströmung

Die Frage ist naheliegend, ob es ein Gesetz für die Temperaturverteilung gibt, bei welchem die zur (x, y) -Ebene senkrecht stehenden Ebenen spannungsfrei sind. Es wäre in diesem Fall $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} \equiv 0$. Die Gleichungen (4)

ergeben dann, unter Berücksichtigung von (5),

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = (1 + \nu) \beta \vartheta, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = (1 + \nu) \beta \vartheta, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Differenziert man die letzte dieser Gleichungen nacheinander partiell nach x und nach y und setzt aus den ersten beiden $\partial u_x / \partial x$ und $\partial u_y / \partial y$ ein, so erhält man die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

das heißt, eine Spannungsfreiheit der geforderten Art ist nur bei stationärer Wärmeströmung in einem von Quellen freien Gebiete möglich.

Auf anderem Wege erhält man dieses Resultat auch beispielsweise durch Einführen der Airyschen Spannungsfunktion F , wobei die durch die Gleichungen:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

definierten Spannungen die Gleichgewichtsbedingungen (6) erfüllen. Die Gleichungen (4) und (5) führen dann nach Elimination der Deformationsgrößen auf die Beziehung:

$$\Delta \Delta F = - \frac{E \beta}{1 - \nu} \Delta \vartheta,$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Wenn die Temperaturverteilung die Gleichung (9) erfüllt, also $\Delta \vartheta = 0$ ist, so folgt $\Delta \Delta F = 0$; das heißt $F \equiv 0$, und damit $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, ist eine mögliche Lösung. Spannungen außer σ_z können also nur noch infolge von Randbedingungen bezüglich wirkender Randkräfte oder bezüglich Deformation, die von dieser Lösung nicht erfüllt werden, auftreten.

Die Bedingungen (8) können auch in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = - \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (10)$$

Diese Gleichungen sind als Cauchy-Riemannsche Beziehungen bekannt und werden erfüllt, wenn u_x und u_y den Realteil und den Imaginärteil einer Funktion w der komplexen Variablen $z = x + i y$ darstellen¹⁾.

$$w(z) = u_x + i u_y. \quad (11)$$

¹⁾ Die Bezeichnung z entspricht der allgemein üblichen Darstellungsweise und ist natürlich nicht zu verwechseln mit der räumlichen Koordinate z .

Wird andererseits von der Temperatur ϑ die Laplacesche Gleichung (9) erfüllt, so kann bekanntlich auch ϑ als Realteil einer Funktion $\Omega(z)$ der komplexen Variablen $z = x + i y$ dargestellt werden:

$$\Omega(z) = \vartheta(x, y) + i \chi(x, y). \quad (12)$$

χ ist dabei die Stromfunktion für die Wärmeströmung.

Die Gleichungen (8) werden nun erfüllt, wenn

$$\frac{dw}{dz} = (1 + \nu) \beta \Omega \quad (13)$$

ist. Umgekehrt kann aber auch, sofern Ω im ganzen Bereich stetig ist, bei vorgegebener Funktion Ω durch Integration die Funktion w gefunden werden

$$w = (1 + \nu) \beta \int \Omega dz. \quad (14)$$

Es ergibt sich also der Satz: Bei ebener stationärer Temperaturverteilung, die im ganzen, einfach zusammenhängenden Bereich der Laplaceschen Differentialgleichung (9) genügt, gibt es für die Deformation eine Lösung, bei der in Ebenen senkrecht zur (x, y) -Ebene keine Spannungen auftreten. Wird die Temperatur als Realteil einer analytischen Funktion $\Omega(z)$ dargestellt, so sind die Verschiebungen u_x und u_y Real- und Imaginärteil der Funktion $w(z)$, die gemäß Gleichung (14) durch Integration der Funktion Ω nach z erhalten wird.

Es ist dann $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, und die Spannung senkrecht zur (x, y) -Ebene ist

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta. \quad (15)$$

Der Verlauf der Deformation und der Spannungen senkrecht zur (x, y) -Ebene soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden:

a) *Linearer Temperaturverlauf*

Es handelt sich hierbei um eine reine Parallelströmung der Wärme, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit als in Richtung der x -Achse verlaufend angenommen werden kann. Es ist hier:

$$\Omega = k z = k x + i k y.$$

Die Temperatur ist $\vartheta = k x$; der Wärmestrom geht natürlich bei positivem k in Richtung der negativen x -Achse. Nach Gleichung (14) kann nun sofort w erhalten werden

$$w = (1 + \nu) \beta \int k z dz = (1 + \nu) \beta k \frac{z^2}{2} = (1 + \nu) \beta \frac{k}{2} (x + i y)^2.$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil ergibt

$$u_x = (1 + \nu) \beta \frac{k}{2} (x^2 - y^2), \quad u_y = (1 + \nu) \beta k x y.$$

Die Normalspannung σ_z ist nach Gleichung (15)

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta = -E \beta k x,$$

während alle anderen Spannungen zu Null werden. Die Linien $x = \text{const}$ in der (x, y) -Ebene erfahren eine Krümmung, wie in Figur 2 dargestellt.

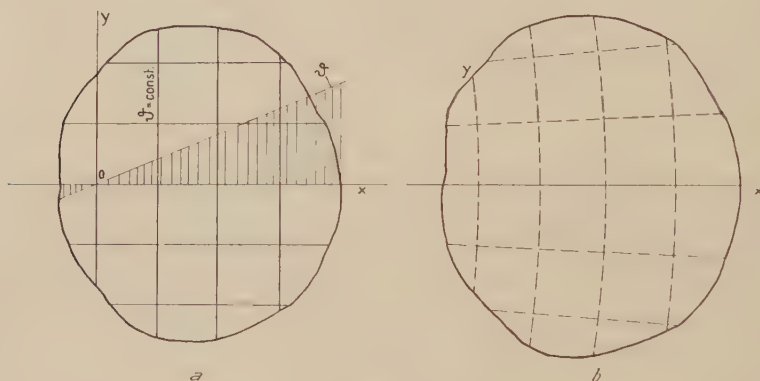


Fig. 2

Temperaturverlauf und Deformation bei linearer Temperaturverteilung in einem Körper (gleichmäßiger Parallelstrom der Wärme). a Temperaturnetz; b Deformation.

b) Quellströmung

Eine Quelle im Nullpunkt des Koordinatensystems wird durch die Funktion

$$\Omega = -a \lg z = -a \ln r - a i \varphi$$

erhalten, wenn z in der Form $z = r e^{i\varphi}$ dargestellt wird. Es wird hierbei in bekannter Weise $\vartheta = -a \ln r$.

Integration von Ω nach z liefert nun

$$w = -(1 + \nu) \beta a z (\lg z - 1) = -(1 + \nu) \beta a r e^{i\varphi} (\ln r + i \varphi - 1).$$

Durch Trennung von Realteil und Imaginärteil erhält man

$$u_x = -(1 + \nu) \beta a r [(\ln r - 1) \cos \varphi - \varphi \sin \varphi],$$

$$u_y = -(1 + \nu) \beta a r [(\ln r - 1) \sin \varphi + \varphi \cos \varphi].$$

Es ist aber in diesem Fall einfacher, sich auf die radiale und die Umfangskomponente der Verschiebung zu beziehen. Es wird

$$u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi = -(1 + \nu) \beta a r (\ln r - 1),$$

$$u_\varphi = -u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi = -(1 + \nu) \beta a r \varphi.$$

Die Normalspannung ist

$$\sigma_z = + E \beta a \ln r.$$

In Figur 3 ist auf Grund dieser Beziehungen die Deformation des Quer-

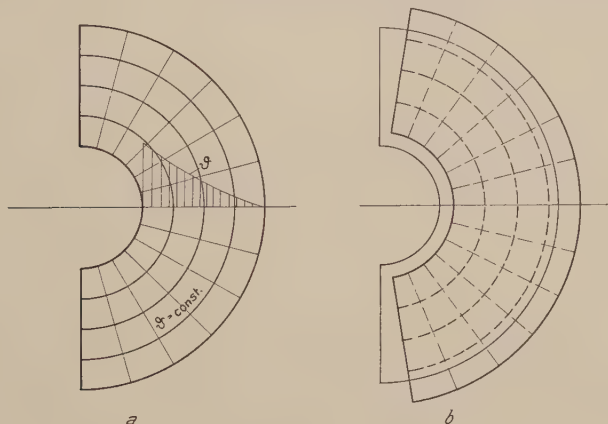


Fig. 3

Temperaturverlauf und Deformation bei ebener Quellströmung.

a Temperaturnetz, *b* Deformation des Querschnittes eines halben Hohlzylinders.

schnittes eines halben Hohlzylinders, durch den Wärme von innen nach außen strömt, dargestellt.

Eine spannungsfreie Verformung ist nicht möglich, wenn die Quelle vom Körper ganz umschlossen ist. Man sieht dies sofort daraus, daß u_φ bei einem vollen Umlauf um den Nullpunkt bis zur Erreichung des Ausgangspunktes einen um den Betrag $\Delta u_\varphi = -(1 + \nu) \beta a 2\pi r$ veränderten Wert annimmt. Ein voller Zusammenhang auf dem ganzen Umfang eines die Quelle umschließenden Kreises ist daher nicht möglich, ohne daß Spannungen auftreten. Der Körper muß bis zur Quelle aufgeschlitzt werden (Figur 4). In zwei benachbarten Punkten *A, B* beidseitig des Schlitzes, wobei *B* bei der Deformation nach B_1 geht, unterscheidet sich die Verschiebung um den obenerwähnten Betrag.

Die Wärmemenge, die pro Zeit- und Längeneinheit der Quelle entströmt, ist

$$Q = a 2\pi \lambda, \quad (\lambda = \text{Wärmeleitfähigkeit})$$

somit kann auch geschrieben werden

$$\Delta u = -(1 + \nu) \frac{\beta}{\lambda} Q r.$$

Der Differenzvektor der Verschiebung steht dabei senkrecht auf der Verbindungsgeraden zwischen dem betrachteten Punkt und der Quelle.

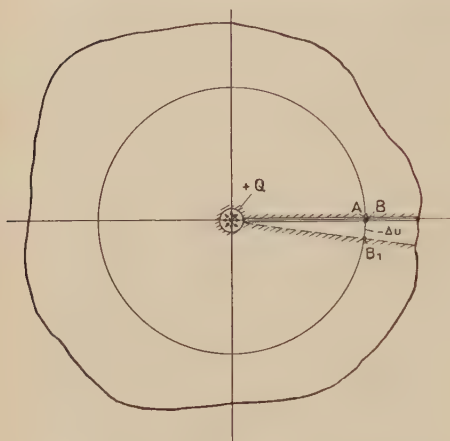


Fig. 4

Körper mit einer Wärmequelle (ebene Strömung). Spannungsfreie Deformation in der Strömungsebene ist nur möglich in dem bis zur Quelle aufgeschlitzten Körper. Bei der Deformation öffnet sich der Schlitz keilförmig.

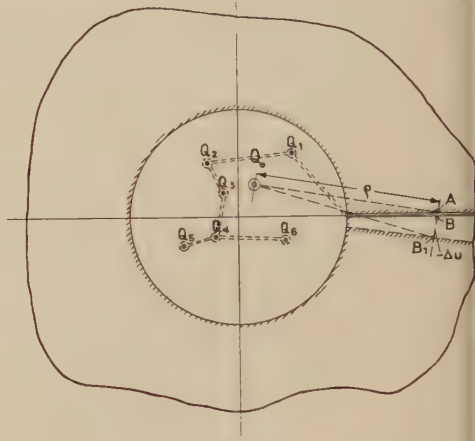


Fig. 5

Körper mit mehreren Wärmequellen. Spannungsfreie Deformation in der Strömungsebene ist nur möglich, wenn die Quellpunkte selbst aus dem Körper ausgeschnitten sind, etwa durch die gestrichelt angedeutete Schlitzführung oder auch sonst durch eine alle Quellen umschließende Kontur. Das Klaffen des Schlitzes entspricht jenem bei einer im Schwerpunkt der Quellen liegenden Ersatzquelle Q_0 .

Sind mehrere Quellen — oder auch Senken — vorhanden, so ergibt sich daraus, daß dann die Differenz der Verschiebung benachbarter Punkte beidseitig des Schlitzes gleich

$$\Delta u = -(1 + \nu) \frac{\beta}{\lambda} Q_0 \varrho$$

beträgt, wobei Q_0 die algebraische Summe aller Quellen Q :

$$Q_0 = \sum_R Q_k$$

und ϱ den Abstand des Schwerpunktes aller Quellen vom betrachteten Punkt bedeuten. Δu steht wieder senkrecht zur Verbindungsgeraden mit diesem

Schwerpunkt (Figur 5). Die beiden Begrenzungen des Schlitzes sind nach der Deformation unter dem Winkel $\delta = -(1 + \nu) \beta Q_0 / \lambda$ gegeneinander geneigt.

Der Schlitz muß irgendwie so geführt werden, daß sämtliche Quellen Q_K aus dem Körper ausgeschnitten werden. Der Quellschwerpunkt Q_0 als nur zum Zwecke der Berechnung der Unstetigkeit der Deformation gedachter Ersatz für das Quellsystem darf dagegen auch innerhalb des Körpers liegen.

Da die Ergiebigkeit der Quellen positiv oder negativ sein kann, so kann der Schwerpunkt auch weit außerhalb des Bereiches dieser Quellen liegen. Heben sich die positiven und negativen Anteile in der Summenbildung für Q_0 im Grenzfall auf, so kann trotzdem das Produkt $Q_0 \varrho$ endlich bleiben, wenn ϱ gegen ∞ geht. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine Quelle und eine Senke gleicher Stärke $+Q$ bzw. $-Q$ vorhanden sind. $Q \varrho$ wird dann gleich dem «Moment»

$$m = Q h$$

dieses Quell-Senken-Systems, wobei h den Abstand von Quelle und Senke bedeutet. Die Verschiebungsdifferenz wird dann für jeden Punkt des Schlitzes gleich groß, nämlich

$$\Delta u = -(1 + \nu) \beta \frac{m}{\lambda},$$

und steht senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Quelle und Senke. Die beiden Begrenzungen des Schlitzes verschieben sich zueinander parallel (Figur 6).

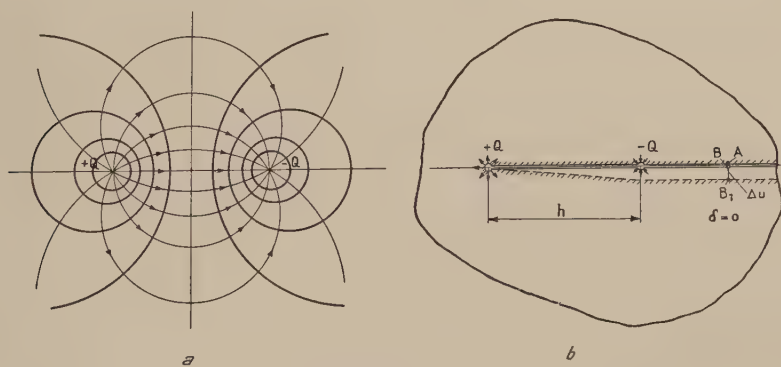


Fig. 6

Körper mit Quelle und Senke gleicher Größe.

a Temperaturnetz, b Verlauf des Klaffens des geschlitzten Körpers.

Von spezieller Bedeutung ist der Grenzfall, wo eine Quelle und eine Senke gleicher Stärke unendlich nahe beieinander sind (Dipol) bei endlich bleibendem Moment m .

c) Quell-Senke (Dipol)

Das komplexe Potential einer solchen Strömung (Figur 7) wird durch Grenzübergang auf unendlich kleinen Abstand einer Quelle und einer Senke erhalten und bekanntlich durch den Ausdruck dargestellt:

$$\Omega = \frac{m}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1}{z} = \frac{m}{2\pi\lambda r} \cos\varphi - i \frac{m}{2\pi\lambda r} \sin\varphi.$$

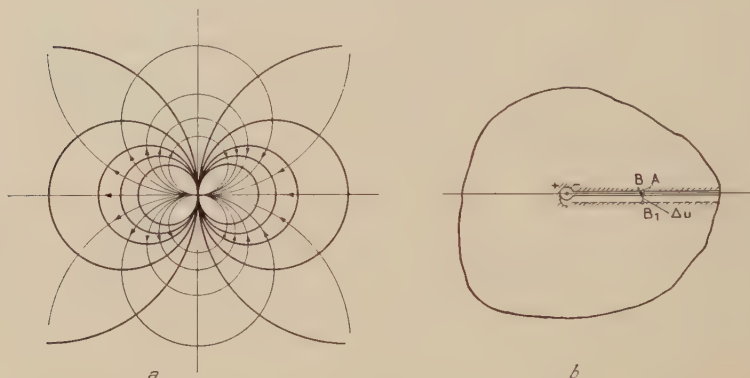


Fig. 7

Körper mit Quell-Senke (Dipol). a Temperaturnetz; b Verlauf des Klaffens des geschlitzten Körpers. Die Schlitzbegrenzungen verschieben sich zueinander parallel.

Die Temperatur ist $\vartheta = [m/(2\pi\lambda r)] \cos\varphi$. Linien konstanter Temperatur und Stromlinien sind Kreise. Die Achse des Dipols (Verbindungsline von Quelle und Senke) fällt mit der x -Achse zusammen. Nach Gleichung (14) erhält man nun

$$\begin{aligned} w &= (1+\nu) \beta \int \frac{m}{2\pi\lambda z} dz = (1+\nu) \beta \frac{m}{2\pi\lambda} \lg z \\ &= (1+\nu) \beta \frac{m}{2\pi\lambda} (\ln r + i\varphi), \end{aligned}$$

das heißt, die Verschiebungskomponenten werden:

$$u_x = (1+\nu) \beta m \frac{\ln r}{2\pi\lambda}, \quad u_y = (1+\nu) \beta \frac{m}{2\pi\lambda} \varphi.$$

Man erkennt, daß u_x bei einem Umlauf um den Dipol stetig in den Ausgangswert übergeht, während aber u_y , die Verschiebungskomponente senkrecht zur Achse des Dipols, sich um

$$\Delta u_y = (1+\nu) \beta \frac{m}{\lambda}$$

ändert und konstant, also unabhängig von der Lage des betrachteten Punktes ist. Dies ist eine Bestätigung des unter b erhaltenen Resultates.

d) *Temperaturfunktion* $\Omega = k r^n$ ($n \neq -1$)

In Polarkoordinaten r, φ ausgedrückt, wird

$$\Omega = k r^n e^{i n \varphi} = k r^n \cos(n \varphi) + i k r^n \sin(n \varphi) . \quad ^\circ$$

Die Temperatur ist $\vartheta = k r^n \cos(n \varphi)$ und hat also n Perioden bei einem Umlauf um den Nullpunkt. Man erhält sofort

$$w = (1 + \nu) \beta k \frac{r^{n+1}}{n+1} = \frac{(1 + \nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} [\cos(n+1) \varphi + i \sin(n+1) \varphi] ,$$

wobei der schon unter Beispiel c behandelte Fall $n = -1$ auszuschließen ist. Man erhält

$$u_x = \frac{(1 + \nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \cos(n+1) \varphi , \quad u_y = \frac{(1 + \nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \sin(n+1) \varphi$$

oder, als radiale und tangentielle Komponenten der Verschiebung:

$$u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi = \frac{(1 + \nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \cos(n \varphi) ,$$

$$u_\varphi = -u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi = \frac{(1 + \nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \sin(n \varphi) .$$

Diese Beziehungen sind für alle positiven oder negativen Werte von n , außer $n = -1$, gültig. Ein Umlauf um den Nullpunkt führt wieder stetig auf den Ausgangspunkt der Verschiebung zurück. Die in Ebenen senkrecht zur (x, y) -Ebene spannungsfreie Verformung ist also auch bei einem geschlossenen, die z -Achse umschließenden zylindrischen Körper möglich. Die Spannungen in z -Richtungen sind daher $\sigma_z = -E \beta \vartheta$.

Dasselbe ist natürlich auch bei der Temperaturfunktion $\Omega = i k r^n$ zu sagen, wobei in den vorstehenden Formeln einfach $\sin(n \varphi)$ durch $\cos(n \varphi)$ und $\cos(n \varphi)$ durch $-\sin(n \varphi)$ zu ersetzen ist.

5. Die Wärmespannungen im zylindrischen Körper mit freien Enden

Bisher wurde eine Verhinderung der Dehnung des Körpers in Achsrichtung (z -Richtung) vorausgesetzt. Dabei tritt in Ebenen senkrecht zur Achse nach Gleichung (7) die von der Koordinate z unabhängige Normalspannung

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

auf.

Sind nun die Enden dieses zylindrischen Körpers frei, so muß diesem Spannungszustand ein solcher überlagert werden, bei dem an den Endflächen die entgegengesetzten Spannungen wirken, wobei der Körper keine Wärme-

deformation erleidet. Es sind damit die Gleichungen (1), (2) und (3) mit $\vartheta = 0$ und unter den vorgegebenen Randbedingungen zu lösen.

Eine partikuläre Lösung, bei der nur Spannungen in z -Richtung auftreten, läßt sich sofort angeben, nämlich

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{E} \left\{ -\nu \left[a_0 x + b_1 \frac{x^2}{2} - b_1 \frac{y^2}{2} + b_2 x y \right] - b_1 \frac{z^2}{2} \right\}, \\ u_y &= \frac{1}{E} \left\{ -\nu \left[a_0 y + b_1 x y + b_2 \frac{y^2}{2} - b_2 \frac{x^2}{2} \right] - b_2 \frac{z^2}{2} \right\}, \\ u_z &= \frac{1}{E} \{ a_0 z + b_1 x z + b_2 y z \}; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = a_0 + b_1 x + b_2 y. \quad (17)$$

Es handelt sich um eine lineare Spannungsverteilung (Zug + reine Biegung), ein Fall, für den ja die elementare Theorie streng gültig ist. Die Glieder mit ν in den Ausdrücken für die Verschiebung berücksichtigen dabei auch die wegen der Querkontraktion auftretende Deformation der zur (x,y) -Ebene parallelen Querschnitte.

Diese Lösung erfüllt im allgemeinen die Bedingung nicht, daß sie die nach Gleichung (7) erhaltenen Wärmespannungen an den Endflächen des Zylinders aufhebt. Doch ist es möglich, die Konstanten a_0 , b_1 und b_2 so zu bestimmen, daß sowohl die resultierende Kraft über dem Querschnitt wie auch die Summe der statischen Momente der Randspannungen bezüglich der x - und y -Achse verschwinden.

Die Gesamtspannung ist

$$\underline{\sigma_{z_{ges}} = a_0 + b_1 x + b_2 y - E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y)}, \quad (18)$$

und die Bedingungen lauten (mit df = Flächenelement des Querschnittes):

$$\begin{aligned} \int \sigma_{z_{ges}} df &= a_0 \int df + b_1 \int x df + b_2 \int y df - E \beta \int \vartheta df \\ &\quad + \nu \int (\sigma_x + \sigma_y) df = 0, \\ \int x \sigma_{z_{ges}} df &= a_0 \int x df + b_1 \int x^2 df + b_2 \int x y df - E \beta \int \vartheta x df \\ &\quad + \nu \int (\sigma_x + \sigma_y) x df = 0, \\ \int y \sigma_{z_{ges}} df &= a_0 \int y df + b_1 \int x y df + b_2 \int y^2 df - E \beta \int \vartheta y df \\ &\quad + \nu \int (\sigma_x + \sigma_y) y df = 0. \end{aligned}$$

Wird das Koordinatensystem so gelegt, daß die z -Achse mit der (durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden) Achse des Zylinders zusammenfällt und daß die x - und y -Achse in die Richtung der Hauptträgheitsachsen des Querschnittes fallen, so gilt für die Integrale in den vorstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int df &= F = \text{gesamte Querschnittsfläche,} \\ \int x df &= y df = 0, \\ \int x^2 df &= J_2 = \text{Trägheitsmoment des Querschnittes für die } y\text{-Achse,} \\ \int y^2 df &= J_1 = \text{Trägheitsmoment des Querschnittes für die } x\text{-Achse,} \\ \int x y df &= 0. \end{aligned} \quad (J_1 \text{ und } J_2 \text{ sind Hauptträgheitsmomente})$$

Man erhält somit:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= E \beta \frac{1}{F} \int \vartheta df - \nu \frac{1}{F} \int (\sigma_x + \sigma_y) df, \\ b_1 &= E \beta \frac{1}{J_2} \int \vartheta x df - \nu \frac{1}{J_2} \int (\sigma_x + \sigma_y) x df, \\ b_2 &= E \beta \frac{1}{J_1} \int \vartheta y df - \nu \frac{1}{J_1} \int (\sigma_x + \sigma_y) y df. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Mit der Wahl dieser Werte für die Konstanten a_0 , b_1 und b_2 ergeben die axialen Spannungen σ_z nach Gleichung (18) weder eine resultierende Kraft noch ein Moment. Die Randspannungen σ_z sind aber im allgemeinen nicht in jedem Punkte des Querschnittes Null, sondern bilden nur unter sich ein Gleichgewichtssystem. Eine völlige Kompensation würde also noch das Anbringen entsprechender Gegenspannungen erfordern. Da diese aber unter sich auch im Gleichgewicht wären, könnte ihr Einfluß sich gemäß dem Prinzip von DE SAINT-VENANT nur auf die unmittelbare Umgebung der Zylinderenden erstrecken. In weiterer Entfernung von den Enden wird dagegen die angegebene Lösung (18) ihre Gültigkeit bewahren. Falls erforderlich, können die Randeinflüsse im speziellen Fall noch besonders berücksichtigt werden.

Die Deformation der Zylinderachse ($x = y = 0$) wird

$$u_{x_0} = -\frac{b_1 z^2}{2E}, \quad u_{y_0} = -\frac{b_2 z^2}{2E}, \quad u_{z_0} = \frac{a_0 z}{E}, \quad (20)$$

das heißt, der Zylinder erfährt eine Längsdehnung

$$\epsilon_z = \frac{a_0}{E} = \beta \frac{1}{F} \int \vartheta df - \frac{\nu}{EF} \int (\sigma_x + \sigma_y) df \quad (21)$$

und eine Krümmung in der (x, y) -Ebene bzw. in der (y, z) -Ebene mit den Krümmungsradien ϱ_2 bzw. ϱ_1 , wobei

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} = \frac{b_1}{E} &= \beta \int_{\tilde{F}} \vartheta y df - \frac{\nu}{J_1 E} \int_{\tilde{F}} (\sigma_x + \sigma_y) y df, \\ \frac{1}{\varrho_2} = \frac{b_2}{E} &= \beta \int_{\tilde{F}} \vartheta x df - \frac{\nu}{J_2 E} \int_{\tilde{F}} (\sigma_x + \sigma_y) x df. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Bei der Berechnung dieser Ausdrücke sind in der üblichen Weise die Dehnungen gegen die Einheit vernachlässigt.

6. Der lineare Temperaturverlauf bei allseitig unbehinderter Dehnung

Der im ersten Beispiel behandelte lineare Temperaturverlauf $\vartheta = k x$ ergab bei behinderter Dehnung in der z -Richtung die Spannungen

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = -E \beta \vartheta = -E \beta k x.$$

Man erhält nun aber sofort einen Deformationszustand, bei dem auch die Spannung σ_z verschwindet, wenn man in Gleichung (18):

$$a_0 = 0, \quad b_1 = E \beta k, \quad b_2 = 0$$

setzt. Allgemein kann also gesagt werden:

Bei einem linearen Temperaturverlauf (also bei gleichmäßigem parallelem Wärmestrom) treten in einem Körper keine Spannungen auf, falls er an der Oberfläche nicht an seiner freien Deformation gehindert wird.

Zu der beim ersten Beispiel erhaltenen Verschiebung sind jene nach den Gleichungen (16) mit den obenstehenden Werten von a_0 , b_1 und b_2 hinzuzufügen. Man erhält so:

$$u_x = \beta k \frac{1}{2} (x^2 - y^2 - z^2), \quad u_y = \beta k x y, \quad u_z = \beta k x z, \quad (23)$$

das heißt, eine Ebene senkrecht zur x -Achse ($x = \text{const}$ bzw. $\vartheta = \text{const}$) wird zu einer Kugelfläche gekrümmt¹⁾ mit dem Krümmungsradius ϱ , wobei

$$\frac{1}{\varrho} = \beta k, \quad (24)$$

k ist dabei das Temperaturgefälle.

¹⁾ Diese wie auch die zuvor festgelegten allgemeinen Aussagen sind natürlich nur innerhalb der von der Elastizitätstheorie gemachten Voraussetzungen kleiner Deformation gültig, also hier beispielsweise nur unter der Voraussetzung, daß die Dimensionen des betrachteten Körpers im Vergleich zum Krümmungsradius ϱ klein seien, was praktisch stets der Fall ist.

7. Berechnung der Unstetigkeit der Deformation eines Hohlquerschnittes aus der Temperaturverteilung

Wird der Hohlquerschnitt (Figur 8) längs der x -Achse aufgeschnitten, so ist, wie oben gezeigt wurde, die Deformation bei stationärem, im ganzen Querschnitt quellenfreiem Temperaturfeld in x - und y -Richtung spannungsfrei, wobei nur wegen Verhinderung der Dehnung in z -Richtung eine Spannung σ_z auftritt. Die Deformation einer aus dem Querschnitt herausgeschnittenen materiellen Linie (Draht, in Figur 8 gestrichelt angedeutet) erfolgt also in der

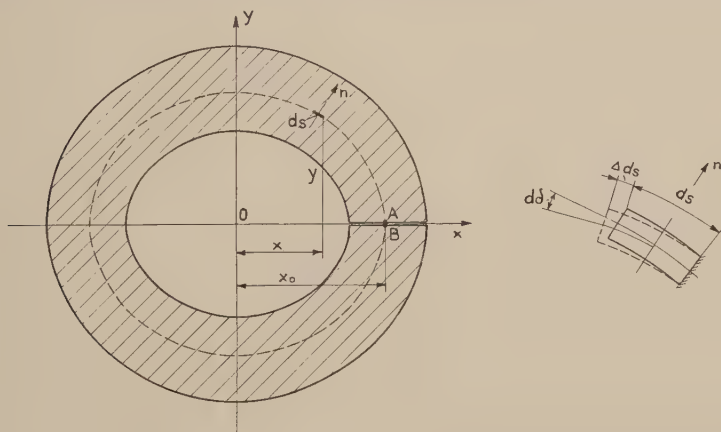


Fig. 8

Allgemeine Bestimmung der Deformation eines aufgeschnittenen Hohlzylinders.

(x, y) -Ebene so, wie wenn das übrige Material nicht vorhanden wäre. Die Unstetigkeit der Deformation kann daher als die gegenseitige Verschiebung des Anfangspunktes A und des Endpunktes B des so herausgeschnittenen, das Loch im Querschnitt vollständig umschließenden Drahtes ermittelt werden.

Ein Element des Drahtes von der Länge ds (in Figur 8a vergrößert dargestellt) erfährt eine Verlängerung

$$\Delta ds = (1 + \nu) \beta \vartheta ds.$$

Der Faktor $(1 + \nu)$ erscheint dabei wegen Verhinderung der Dehnung in z -Richtung. Außerdem krümmt sich das Element, wenn die Temperatur quer zum Draht ein Gefälle $\partial \vartheta / \partial n$ aufweist, derart, daß der Endpunkt des Elementes sich bei festgehaltenem Anfangspunkt um den Betrag $d\delta = \beta (\partial \vartheta / \partial n) ds$ verdreht. Die gesamte Neigung und Verschiebung des Drahtendes B kann nun so ermittelt werden, daß man das Integral über die infolge der Dehnung und Winkeländerung der einzelnen Elemente auftretende Neigung und Verschiebung

bung des Drahtendes ermittelt. Man erhält so:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (1 + \nu) \beta \oint \frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds, \\ \Delta u_x &= (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dx + (1 + \nu) \beta \oint y \frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds, \\ \Delta u_y &= (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dy - (1 + \nu) \beta \oint (x - x_0) \frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Integrale sind über den ganzen Umlauf von A bis B zu erstrecken.

Wird in diesen Beziehungen noch die durch das Drahtelement ds durchtretende Wärmemenge, pro Zeiteinheit und pro Längeneinheit der z -Richtung, $dq = -\lambda(\partial\vartheta/\partial n) ds$ eingeführt und die gesamte durch den Draht von innen nach außen durchtretende Wärmemenge mit Q bezeichnet, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \delta &= -(1 + \nu) \beta \frac{Q}{\lambda}, \\ \Delta u_x &= (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dx - (1 + \nu) \frac{\beta}{\lambda} \oint y dq, \\ \Delta u_y &= (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dy + (1 + \nu) \frac{\beta}{\lambda} \oint x dq - x_0 (1 + \nu) \beta \frac{Q}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Für einen den Hohlraum nicht umschließenden Draht werden natürlich diese drei Werte zu Null.

8. Berechnung der Wärmespannungen bei Hohlquerschnitten

Die in den Hohlzylindern in zur Achse parallelen Schnitten auftretenden Zwangsspannungen können nun so berechnet werden, daß im aufgeschlitzten Körper an der Trennstelle Kräfte und Momente angebracht werden, welche die Neigung δ und die Verschiebungsdifferenz Δu_x und Δu_y nach den Gleichungen (26) rückgängig machen.

Für das Rohr mit Kreisquerschnitt läßt sich diese Aufgabe genau lösen. Die auftretenden Spannungen sind auf andere Weise schon direkt unter Einführung von Ansätzen mit stetiger Deformation gelöst worden. Bei einer über den Rohrumfang ungleichmäßigen Temperaturverteilung wird die Temperatur am besten unter Einführung von Polarkoordinaten durch die Reihe

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{r_1} \right)^n + a_{-n} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-n} \right] \cos(n\varphi) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \left(\frac{r}{r_1} \right)^n + b_{-n} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-n} \right] \sin(n\varphi) + c_0 \ln \frac{r}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

dargestellt. Wie aus den behandelten Beispielen b, c und d zu ersehen ist, geben dabei nur die Glieder $a_{-1} (r_1/r) \cos \varphi$, $b_{-1} (r_1/r) \sin \varphi$ und $c_0 \ln r/r_1$ Anlaß

zum Auftreten von Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} bzw. in Polarkoordinaten σ_r , σ_φ , $\tau_{r\varphi}$. Die Unstetigkeit der Deformation beim aufgeschlitzten Rohr würde hier:

$$\begin{aligned}\delta &= (1 + \nu) \beta c_0 2\pi, \\ \Delta u_x &= -(1 + \nu) \beta b_{-1} 2\pi r_1, \\ \Delta u_y &= (1 + \nu) \beta a_{-1} 2\pi r_1 + (1 + \nu) \beta c_0 2\pi x_0.\end{aligned}$$

Beim geschlossenen Rohr mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 treten dagegen die folgenden Spannungen auf:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E\beta}{2(1-\nu)} \left\{ c_0 \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_1} \right] \right. \\ &\quad \left. + [a_{-1} \cos \varphi + b_{-1} \sin \varphi] \left[\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right] \right\}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E\beta}{2(1-\nu)} \left\{ c_0 \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_1} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + [a_{-1} \cos \varphi + b_{-1} \sin \varphi] \left[-\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{3 r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right] \right\}, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{E\beta}{2(1-\nu)} [a_{-1} \sin \varphi - b_{-1} \cos \varphi] \left[-\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right].\end{aligned}\quad (28)$$

Die innere und äußere Rohroberfläche ist hierbei als spannungsfrei vorausgesetzt ($\sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0$ für $r = r_1$ und $r = r_2$).

Die dem ersten Glied, mit dem Koeffizienten c_0 , entsprechenden Wärmespannungen gemäß den Gleichungen (28) beziehen sich auf die zentralsymmetrische Temperaturverteilung und sind schon im Jahre 1907 von LORENZ¹⁾ angegeben worden. Die Spannungen in ungleichmäßig erwärmten Rohren wurden von SCHAU im Jahre 1932 behandelt²⁾. Er fand hierbei, daß die Temperaturglieder mit $r^n \cos n\varphi$ keine Spannungen in Richtung senkrecht zur Rohrachse hervorrufen, beachtete aber den Ausnahmefall $n = -1$ nicht. Die in den Gleichungen (28) diesem Fall entsprechenden Spannungen mit den Koeffizienten a_{-1} bzw. b_{-1} wurden von SCHAU nach einer auf Anregung von Professor STODOLA³⁾ erfolgten Nachprüfung seiner ursprünglichen Rechnung im Jahre 1935 angegeben⁴⁾.

Die Lösungsmethode, bei der vom aufgeschlitzten Zylinder ausgegangen wird, gestattet aber, die Wärmespannungen in Rohren von beliebigem Querschnitt zu berechnen. Es besteht dabei die Aufgabe, Spannungen und Defor-

¹⁾ R. LORENZ, *Temperaturspannungen in Hohlzylindern*, Z. VDI. 51, 743 (1907).

²⁾ F. SCHAU, *Das Temperaturfeld und die Temperaturspannung im Siederohr*, Z. Dampfkesselunters.- u. -Vers.-Ges. Wien 57, Nr. 8 bis 11 (1932).

³⁾ A. STODOLA, *Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmäßig erwärmten Rohren*, Schweiz. Bauztg. 104, 229 (1934).

⁴⁾ F. SCHAU, Z. Dampfkesselunters.- u. -Vers.-Ges. Wien 60, 8 (1935) (Zuschrift).

mationen infolge einer an der Schnittstelle angebrachten Zugkraft, einer Schubkraft und eines Momentes zu bestimmen. In besonderen Fällen dürfte es möglich sein, diese Aufgabe genau nach der strengen Elastizitätstheorie zu lösen, andernfalls wird dies mit einer Näherungstheorie möglich sein, wobei

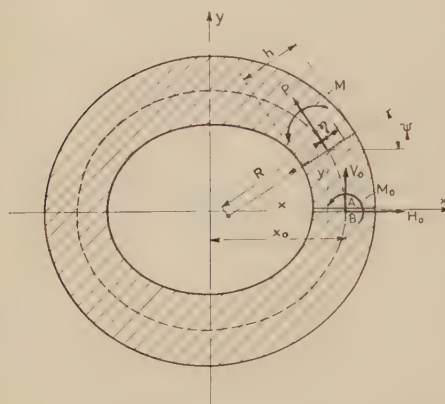


Fig. 9

Kräfte und Momente in den Längsschnitten eines Hohlzylinders.

etwa die Rohrwand als gekrümmter Stab behandelt wird, mit der Annahme, daß die Normalen zur Mittelfläche der Rohrwand auch nach der Deformation gerade bleiben und senkrecht zur deformierten Mittelfläche stehen.

Gemäß dieser Theorie¹⁾ ist die Spannung über die Normale zur Wand folgendermaßen verteilt:

$$\sigma = \frac{1}{F} \left(P + \frac{M}{R} \right) + \frac{M}{Z} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta/R}, \quad (29)$$

wobei P die Zugkraft im Querschnitt und M das Biegemoment (positiv im Sinne einer Verstärkung der Krümmung) bedeuten. R ist der Krümmungsradius der undeformierten Wand, η ist der Abstand des betrachteten Punktes von der Wandmitte, positiv gerechnet nach außen. Die Querschnittsfläche F ist bei Bezug auf die Längeneinheit des Rohres gleich der Wandstärke h , und Z ist eine Größe, die nur sehr wenig vom Trägheitsmoment $\vartheta = h^3/12$ des Querschnittes verschieden ist. Sie ist definiert als

$$Z = \int_{\eta=-h/2}^{+h/2} \frac{\eta^2 d\eta}{1 + \eta/R} = R^3 \left[\ln \frac{1 + (h/2 R)}{1 - (h/2 R)} - \frac{h}{R} \right] \approx \frac{h^3}{12}.$$

Zur Berechnung der Deformation wird am einfachsten von der Deformationsarbeit A ausgegangen. Für den ganzen Umlauf von A bis B (Figur 9) ist

$$A = (1 - \nu^2) \left\{ \oint_{AB} \frac{(P + M/R)^2}{2 F E} ds + \oint_{AB} \frac{M^2}{2 Z E} ds \right\}. \quad (30)$$

Der Faktor $(1 - \nu^2)$ erscheint hier, im Unterschied zum gebogenen Stab, wegen der Verhinderung der Querkontraktion. Der Einfluß der Schubspannungen auf die Deformation ist vernachlässigt.

Wirken am Ende B des aufgeschlitzt gedachten Rohrquerschnittes (bei $x = x_0$) die Kräfte H_0 und V_0 sowie das Moment M_0 , so gilt für die Beanspru-

¹⁾ Beispielsweise gemäß der Darstellung von M. TEN BOSCH, *Berechnung der Maschinenelemente* (Springer, Berlin 1951), S. 35ff.

chung an einem beliebigen Ort (x, y) der Wand (Figur 9)

$$\left. \begin{aligned} P &= V_0 \cos \psi - H_0 \sin \psi, \\ M &= M_0 + H_0 y + V_0 (x_0 - x), \\ P + \frac{M}{R} &= V_0 \left[\cos \psi + \frac{x_0 - x}{R} \right] + H_0 \left[-\sin \psi + \frac{y}{R} \right] + \frac{M_0}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Die Verdrehung δ^* des Endquerschnittes B bzw. die Verschiebung Δu_x^* , Δu_y^* werden nun als die partiellen Ableitungen der Deformationsarbeit nach dem Moment M_0 bzw. nach den Kräften H_0 und V_0 erhalten. Es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= \frac{\partial A}{\partial M_0} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{FR} ds + \oint \frac{M}{Z} ds \right\}, \\ \Delta u_x^* &= \frac{\partial A}{\partial H_0} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{F} \left(-\sin \psi + \frac{y}{R} \right) ds + \oint \frac{M}{Z} y ds \right\}, \\ \Delta u_y^* &= \frac{\partial A}{\partial V_0} \\ &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{F} \left(\cos \psi + \frac{x_0 - x}{R} \right) ds + \oint \frac{M}{Z} (x_0 - x) ds \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wobei P und M aus den Beziehungen (31) einzusetzen sind. Die Größen M_0 , V_0 und H_0 müssen nun so bestimmt werden, daß die Deformationsgrößen δ^* , u_x^* , u_y^* die durch die Temperaturdehnung erhaltene Unstetigkeit an der Schnittstelle, nämlich δ , Δu_x und Δu_y nach den Gleichungen (26) wieder aufheben. Die drei Beziehungen

$$\delta + \delta^* = 0, \quad \Delta u_x + \Delta u_x^* = 0, \quad \Delta u_y + \Delta u_y^* = 0 \quad (33)$$

ermöglichen somit die Bestimmung der in den Gleichungen (32) noch enthaltenen drei Unbekannten M_0 , H_0 , V_0 . Diese können als Konstante bei der Integration vorausgenommen werden, so daß Integrale zu bilden sind, die nur von der geometrischen Form des Rohrquerschnittes abhängig sind.

Symmetrischer Querschnitt und Temperaturverlauf

Besonders einfach werden die Beziehungen, wenn der Rohrquerschnitt und der Temperaturverlauf eine doppelte Symmetrie, zum Beispiel bezüglich der x -Achse und der y -Achse, besitzen. Dann werden die Umlaufintegrale in den Gleichungen (26) zu Null, und es ergibt sich

$$\delta = -(1 + \nu) \beta \frac{\varrho}{\lambda}, \quad \Delta u_x = 0, \quad \Delta u_y = -x_0 (1 + \nu) \beta \frac{\varrho}{\lambda}.$$

Die Unstetigkeit der Deformation bei x_0 ist also nur noch von der gesamten durchtretenden Wärmemenge Q abhängig, während die Verteilung dieser Wärme auf den Rohrumfang außer der Symmetriebedingung keiner Einschränkung unterliegt. Ferner wird

$$H_0 = V_0 = 0 \quad \text{und} \quad \delta^* = M_0 \frac{1 - \nu^2}{E} \oint \frac{1 + Z/(FR^2)}{Z} ds.$$

Die erste der Gleichungen (33) liefert somit, nach M_0 aufgelöst:

$$M_0 = \frac{E \beta Q}{(1 - \nu) \lambda} \oint \frac{1 + Z/(FR^2)}{Z} ds.$$

Wird hier $F = h$ und näherungsweise $Z = h^3/12$ gesetzt, so ergibt sich

$$M_0 = \frac{E \beta Q}{(1 - \nu) \lambda} \oint \frac{12}{h^3} \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) ds,$$

wobei die Wandstärke h und der Krümmungsradius R noch mit dem durchlaufenen Bogen s veränderlich sein können.

Das Biegemoment wird über den ganzen Umfang konstant $M = M_0$, und die Spannung wird nach Gleichung (29)

$$\sigma = \frac{12 M_0}{h^3} \left\{ \frac{h^2}{12 R} + \frac{\eta}{1 + \eta/R} \right\}.$$

Interessant ist, daß bei diesem zweifach symmetrischen Problem die Spannungen nur von der gesamten durchströmenden Wärmemenge abhängen, nicht aber von der örtlichen Verteilung dieser Wärmemenge. Dasselbe ist übrigens auch bei mehrfach symmetrischer Temperaturverteilung der Fall, beispielsweise bei einem Rohrquerschnitt nach Art eines regulären Polygons, wobei der Wärmedurchtritt bei jeder Polygonecke gleich verteilt ist.

Summary

The paper deals with the thermal stresses and deformation in an elastic body with a steady, two-dimensional heat flow. General relations between temperature distribution and deformation, using functions of the complex variable $x + i y$, are established. The analysis leads to a particular solution, for which in sections perpendicular to the plane of flow (x, y) stresses do not occur for a steady heat flow without sources or sinks, in a simply connected region. Different examples of temperature distribution with corresponding deformation are presented. Finally the thermal stresses occurring in a hollow cylindrical body with arbitrary cross section are treated in a general way and special reference is made to stresses in circular tubes.

(Eingegangen: 20. 8. 1951.)

On the Theory of Filtration of Signals

By LOTFI A. ZADEH, New York¹⁾

Introduction

It is often taken granted that given an ensemble of signals $\{u_1(t) + u_2(t)\}$ where $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$ represent the message and noise ensembles respectively, one cannot achieve a perfect separation of the messages from noise unless the two ensembles occupy non overlapping bands in the frequency spectrum. This is true, of course, as long as the filter employed for the separation of messages from noise is restricted to a fixed linear network. It is not true, however, when one is permitted to use linear variable filters. In this note we shall give a brief outline of a theory of linear variable filters²⁾ and deduce the conditions under which two (or more) signal ensembles can be separated from each other by the use of such filters.

It will be noted that many of the mathematical relations used in the sequel are commonly employed in wave mechanics, though in a different form and for different purposes. The differences stem from the special character of filters and the nature of the problems involved in the filtration of signals.

Representation of Signals

GABOR³⁾ has studied certain aspects of the problem of representation of signals in terms of so-called "elementary signals" and has pointed out the advantages of some particular types of representation. For our purposes, it will be convenient to use a general form of integral representation

$$u(t) = \int_C k(t; \lambda) U(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

where $u(t)$ is a signal defined over the interval $-\infty < t < \infty$; λ is a complex variable; $k(t; \lambda)$ is a suitable set of functions of t [representing the component signals in terms of which $u(t)$ is resolved]; $U(\lambda)$ is the spectral function of $u(t)$ relative to $k(t; \lambda)$; and C is an appropriate contour in the λ -plane (generally a straight line parallel to either the imaginary or real axis).

¹⁾ Columbia University.

²⁾ A more complete discussion of certain aspects of the theory will appear in a forthcoming paper in the "Journal of the Franklin Institute".

³⁾ D. GABOR, J. Inst. electr. Engrs. 93, pt. III, 429 (1946).

It is assumed that the kernel $k(t; \lambda)$ possesses an inverse $k^{-1}(\lambda; t)$ such that

$$\int_C k(t; \lambda) k^{-1}(\lambda; t') d\lambda = \delta(t - t') \quad (2)$$

where $\delta(t - t')$ is the Dirac delta-function. In terms of $k^{-1}(\lambda; t)$ the spectral function $U(\lambda)$ may formally be written

$$U(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{-1}(\lambda; t) u(t) dt. \quad (3)$$

It will be observed that the case where the $k(t; \lambda)$ form a discrete set can be regarded as a special case of (1) wherein the spectral function $U(\lambda)$ consists of a train of delta-functions. The use of delta-functions may be avoided by writing (1) in the Stieltjes integral form.

A few basic types of the $k(t; \lambda)$ functions and their respective inverses are collected below. Other types may be derived from these by changes of variables, and by non-singular linear transformations of $k(t; \lambda)$. The various well-known types of orthogonal sets of functions are omitted for brevity.

$$(1) \quad k(t; \lambda) = \delta(t - \lambda); \quad k^{-1}(\lambda; t) = \delta(t - \lambda); \quad C = \text{real axis.}$$

$$(2) \quad k(t; \lambda) = 1(t - \lambda) \quad (\text{unit step function}); \\ k^{-1}(\lambda; t) = \delta^{(1)}(\lambda - t) \quad (\text{unit doublet function}); \quad C = \text{real axis.}$$

$$(3) \quad k(t; \lambda) = 1(t) \frac{e^{\lambda t}}{2\pi j}; \quad k^{-1}(\lambda; t) = e^{-\lambda t}; \quad C = \text{Bromwich-Wagner contour}; \\ u(t) \text{ and } U(\lambda) \text{ constitute a pair of Laplace transforms.}$$

$$(4) \quad k(t; \lambda) = 1(t) \frac{t^{-\lambda}}{2\pi j}; \quad k^{-1}(\lambda; t) = t^{\lambda-1}; \quad C = \text{Bromwich-Wagner contour}; \\ u(t) \text{ and } U(\lambda) \text{ constitute a pair of Mellin transforms.}$$

$$(5) \quad k(t; \lambda) = 1(t - \lambda) - 1(t - \lambda - 1) \quad (\text{unit pulse}); \\ k^{-1}(\lambda; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(1)}(\lambda - t - n) \quad (\text{train of unit doublets}); \quad C = \text{real axis.}$$

$$(6) \quad k(t; \lambda) = 1(t) \sqrt{\lambda t} J_n(\lambda t); \quad k^{-1}(\lambda; t) = 1(\lambda) \sqrt{\lambda t} J_n(\lambda t); \quad C = \text{real axis}; \\ u(t) \text{ and } U(\lambda) \text{ constitute a pair of Hankel transforms of order } n.$$

Linear Variable Filters

Let N represent a linear variable filter and let $u(t)$ and $v(t)$ be, respectively, the input and output of N . It will be assumed throughout that N is at rest, but not necessarily fixed, prior to the application of the input.

Let $K(t; \lambda)$ be the response of N to $k(t; \lambda)$ —both regarded as functions of time involving λ as a parameter. The function $K(t; \lambda)$ will be called a *characteristic function* of N , since it provides a complete characterization of the relation between the input and output of N . For the purposes of our analysis, we shall regard $K(t; \lambda)$ as a primary characteristic of N , rather than as a derived quantity to be obtained, say, from the solution of the equations governing the behavior of the system.

The response of N to a specified input $u(t)$ can readily be expressed in terms of $K(t; \lambda)$ and the spectral function $U(\lambda)$ relative to $k(t; \lambda)$. Thus, by resolving $u(t)$ in terms of $k(t; \lambda)$ [equation (1)] and employing the definition of $K(t; \lambda)$, the expression for the output of N is formally found to be

$$v(t) = \int_{\mathcal{C}} K(t; \lambda) U(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

When no ambiguity results, this relation will be written more simply in the usual symbolic form

$$v = K u. \quad (5)$$

Equations (1) and (4) can be interpreted in the usual manner in terms of function space concepts. Briefly, let the signal space constituted by the class of signals under consideration be a linear vector space Σ . (A Hilbert space, possibly of a nonseparable type, is adequate for most practical purposes. It should be remarked that some of the statements made in the sequel apply, strictly speaking, only to Hilbert space.) A signal $u(t)$ is represented as a vector in Σ . The $k(t; \lambda)$ constitute a basis for Σ (or for a space in which Σ is imbedded). A linear operation on Σ transforms the basis $k(t; \lambda)$ into $K(t; \lambda)$, leaving invariant the coordinates of $u(t)$, i. e. $U(\lambda)$, with respect to $k(t; \lambda)$.

When $k(t; \lambda) = \delta(t - \lambda)$, the characteristic function becomes the impulsive response (Green's function) of N , and is denoted by $W(t; \lambda)$. For this case $U(\lambda) = u(\lambda)$ and (4) reduces to the familiar relation

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t; \xi) u(\xi) d\xi. \quad (\lambda = \xi) \quad (6)$$

It will be noted that the impulsive response of a physical system vanishes for $t < \lambda$. Conversely, the vanishing of $W(t; \lambda)$ for $t < \lambda$ is the only condition [apart from the obvious requirement that $W(t; \lambda)$ be a real function of its

arguments] for physical realizability of a filter, provided no restrictions are imposed on the form or the structure of the filter.

For $k(t; \lambda) = e^{\lambda t} / 2\pi j$, it is convenient to write the corresponding characteristic function in the form

$$\begin{aligned} K(t; \lambda) &= H(\lambda; t) k(t; \lambda) \\ &= H(\lambda; t) \frac{e^{\lambda t}}{2\pi j} \end{aligned} \quad (7)$$

where $H(\lambda; t)$ represents the so-called *system function*¹⁾ of N . The spectral function $U(\lambda)$ is the Laplace transform of $u(t)$ and (4) becomes

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C H(\lambda; t) U(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \quad (8)$$

where C is the Bromwich-Wagner contour. [For simplicity, it is tacitly assumed here that $u(t)$ vanishes for negative t .] Equation (8) can be written more compactly in an operational form

$$v(t) = H(p; t) u(t) \quad (9)$$

where $H(p; t)$ plays the role of a time-dependent Heaviside operator²⁾. In operating on $u(t)$, $H(p; t)$ should be treated as if it were an ordinary Heaviside operator involving t as a parameter.

It is useful to have an expression for the impulsive response $W(t; \xi)$ in terms of $K(t; \lambda)$ and vice versa. These expressions can readily be obtained by applying equation (6) to $u(t) = k(t; \lambda)$. We find

$$K(t; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t; \xi) k(\xi; \lambda) d\xi \quad (10)$$

and by inversion of this relation,

$$W(t; \xi) = \int_C K(t; \lambda) k^{-1}(\lambda; \xi) d\lambda. \quad (11)$$

The above relations apply to any linear filter. We now define an *ideal* filter as a system N which passes without distortion (or delay) all component signals $k(t; \lambda)$ in which λ belongs to a set A (acceptance band) on C , and rejects those component signals in which λ (on C) does not belong to A (rejection band). In terms of $K(t; \lambda)$ this implies

$$K(t; \lambda) = \begin{cases} k(t; \lambda), & \text{for } \lambda \text{ in } A \\ 0, & \text{for } \lambda \text{ not in } A \end{cases}. \quad (12)$$

¹⁾ L. A. ZADEH, J. appl. Phys. 21, 1171 (1950).

²⁾ L. A. ZADEH, J. Math. Phys. 30, 73 (1951).

The two sets of functions $\{k(t; \lambda), \lambda \text{ in } A\}$ and $\{k(t; \lambda), \lambda \text{ not in } A\}$ span two complementary manifolds M_A and M_R , respectively, in the signal space Σ . Consequently, the operation performed by an ideal filter is equivalent, in function space terms, to the projection of Σ on the manifold M_A (the acceptance manifold) along the manifold M_R (the rejection manifold).

The fact that projection is an idempotent operation suggests the following alternative definition of an ideal filter: *A filter N is called ideal if it is idempotent, that is, if it is equivalent to a tandem combination of two filters each of which is identical with N .* In some respects, this definition is more basic and also more general than that given previously; however, it applies only to linear filters.

The impulsive response of an ideal filter is readily obtained by substituting (12) into (11). We find

$$W(t; \xi) = \int_A k(t; \lambda) k^{-1}(\lambda; \xi) d\lambda \quad (13)$$

where the integral is taken over the set A .

An ideal filter is not, in general, a physically realizable system inasmuch as the expression for $W(t; \xi)$ given above does not, in general, vanish for $t < \xi$. However, as long as $W(t; \xi)$ satisfies a rather weak condition, $W(t; \xi) \rightarrow 0$ as $t - \xi \rightarrow -\infty$, one can approximately realize $W(t - \beta; \xi)$, where β is a sufficiently large constant, with as small an error as desired. In physical terms, this means that, if $W(t; \xi) \rightarrow 0$ as $t - \xi \rightarrow -\infty$, one can construct a physical filter which would approximate specified ideal filter to within a constant time-delay β .

It should not be overlooked that in order to be realizable $W(t; \xi)$ must be a real function of its arguments. This condition is satisfied by (13) because the acceptance band A is supposed to be chosen in such a manner as to correspond to real signals.

We shall illustrate the relations given above by two simple examples. First let $k(t; \lambda) = \delta(t - \lambda)$ and suppose that the set A consists of the interval $0 \leq \lambda \leq T$. Equation (13) gives

$$W(t; \xi) = \int_0^T \delta(t - \lambda) \delta(\lambda - \xi) d\lambda \quad (14)$$

which reduces to

$$\begin{aligned} W(t; \xi) &= \delta(t - \xi) & \text{for } 0 \leq \xi \leq T \\ W(t; \xi) &= 0, & \text{for all other } \xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Physically, this represents a switch which is closed during the time interval $0 \leq t \leq T$ and is open for $t < 0$ and $t > T$.

A less trivial example is the following. Let

$$k(t; \lambda) = \frac{e^{j\omega t}}{2\pi j(1 + \alpha \cos t)}, \quad (\lambda = j\omega, |\alpha| < 1) \quad (16)$$

which has

$$k^{-1}(\lambda; t) = (1 + \alpha \cos t) e^{-j\omega t} \quad (17)$$

for the inverse. Suppose that the filter is required to accept only those component signals in which $|\omega| < \omega_0$. This condition, in conjunction with (13), (16), and (17), leads to the following expression for $W(t - \beta; \xi)$

$$W(t - \beta; \xi) = (1 + \alpha \cos \xi) \frac{\sin \omega_0(t - \beta - \xi)}{\pi(t - \beta - \xi)} \cdot \frac{1}{[1 + \alpha \cos(t - \beta)]} \cdot \quad (18)$$

Physically, this represents a tandem connection of three filters N_1 , N_2 , and N_3 each corresponding to a factor in (18). N_1 consists of an amplitude modulator whose system function is

$$H_1(t) = 1 + \alpha \cos t; \quad (19)$$

N_2 represents a conventional low-pass filter such that

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\beta}, & \text{for } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{for } |\omega| > \omega_0 \end{cases}; \quad (20)$$

and N_3 is an amplitude modulator with the system function

$$H_3(t) = \frac{1}{1 + \alpha \cos(t - \beta)}. \quad (21)$$

This particular type of filter is a special case of a much more general type but a discussion of this and other types of ideal filters is outside the limited scope of the present note.

Consider now two ensembles of signals $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$ of which $\{u_1(t)\}$ say, represents the messages and $\{u_2(t)\}$ represents the noise, and suppose that one is given the sum $\{u_1(t) + u_2(t)\}$. It is of interest to inquire about the conditions which must be satisfied in order to make possible the extraction of the message ensemble (possibly with a time-delay) by means of a linear filtration of the sum of messages and noise. To put it another way, we are interested in the conditions under which there exists a physically realizable linear operator K such that the relation

$$K[u_1(t) + u_2(t)] = u_1(t - \beta) \quad (22)$$

holds for sufficiently large β with any desired accuracy.

We shall confine ourselves here to a brief and heuristic discussion of this question. A more complete analysis of the problem and its practical implications will be given in a subsequent paper¹).

Leaving aside for the moment the question of physical realizability, we set $\beta = 0$ in equation (22) and examine the resulting relation

$$K[u_1(t) + u_2(t)] = u_1(t) \quad (23)$$

in the light of the well-known properties of linear vector spaces.

Let M_1 and M_2 be the manifolds spanned in Σ by $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$, respectively. In order that (23) hold it is necessary and sufficient that M_1 and M_2 be disjoint, i. e. have no element in common except the origin, in which case K is simply the projection of Σ on M_1 along M_2 . Since the operation of projection is equivalent to filtration with an ideal filter, we conclude that the message and noise ensembles can be separated from each other by means of an ideal filter if and only if the manifolds spanned by these ensembles are disjoint.

In order to obtain an explicit characterization of the ideal filter in question, it is expedient to choose a basis $k(t; \lambda)$ in Σ which is adapted (in the function space sense) to M_1 and M_2 . In terms of this basis, the spectral function ensembles $\{U_1(\lambda)\}$ and $\{U_2(\lambda)\}$ corresponding to $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$, respectively, assume the following form:

$$\left. \begin{aligned} \{U_1(\lambda)\} &= 0, & \text{for } \lambda \text{ in } A \text{ (on } C), \\ \{U_2(\lambda)\} &= 0, & \text{for } \lambda \text{ not in } A \text{ (on } C). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

It will be observed that the familiar cases of signals which occupy nonoverlapping bands in the frequency spectrum or are multiplexed in the time domain, are special cases of the situation represented by equation (24).

Since A_1 constitutes the acceptance band of the filter, the expression for the impulsive response of the ideal filter in question may be obtained at once by applying equation (13). Thus, we find

$$W(t, \xi) = \int_{A_1} k(t; \lambda) k^{-1}(\lambda; \xi) d\lambda$$

where the integral is taken over A_1 . As was discussed previously, this ideal filter is not, in general, physically realizable, but one can approximate to $W(t - \beta; \xi)$ (for sufficiently large β) by a physical filter, provided $W(t; \xi)$ tends to zero as $t - \xi \rightarrow -\infty$. This physical filter would yield the message ensemble delayed by the time β with as small an error as desired, and thus would satisfy the condition expressed by equation (22).

¹) L. A. ZADEH and K. S. MILLER, J. appl. Phys. 22 (1952) (to be published).

Zusammenfassung

Einige Gesichtspunkte des Problems der Trennung von Information und Rauschen mittels linearveränderlicher Filter werden erörtert, und eine Theorie solcher Filter ist wiedergegeben. Ein Filter N wird ideal genannt, wenn es gleichwertig ist zu einer Kettenschaltung von zwei Filtern, wobei jedes mit N identisch ist. Es wird gezeigt, daß im allgemeinen Informations- und Rauschgemische mit Hilfe entsprechender idealer Filter getrennt werden können, vorausgesetzt daß die in Frage stehenden Gemische unzusammenhängende Mannigfaltigkeiten im Signalraum umfassen.

(Received: August 2, 1951.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Nomogramm zur Bestimmung der reellen und komplexen Wurzeln einer Gleichung vierten Grades

VON EDUARD BATSCHELET UND HANS RUDOLF STRIEBEL, Basel¹⁾

Vor kurzem hat H. BLENK zur graphischen Auflösung von Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten *Netztafeln* angegeben²⁾. Der Grundgedanke besteht darin, daß man die gegebene Gleichung

$$z^4 + a z^3 + b z^2 + c z + d = 0 \quad (1)$$

mit Hilfe der Transformation $z = z' - a/4$ auf die Normalform

$$z'^4 + p z'^2 + q z' + r = 0 \quad (2)$$

bringt. Dadurch wird der Schwerpunkt, den die Bildpunkte der vier Wurzeln in der komplexen Zahlenebene besitzen, in den Nullpunkt gerückt, so daß die Wurzeln in der Gestalt

$$z'_1 = u + v, \quad z'_2 = u - v, \quad z'_3 = -u + w, \quad z'_4 = -u - w \quad (3)$$

angesetzt werden dürfen. Hierbei kann u wegen der Symmetrie zur reellen Achse als eine *reelle, nichtnegative Zahl* betrachtet werden, während v und w je nach der Anzahl der reellen oder der komplexen Wurzeln reell oder rein imaginär sein können. Vergleicht man p, q, r mit den entsprechenden Koeffizienten der Gleichung

$$(z' - z'_1)(z' - z'_2)(z' - z'_3)(z' - z'_4) = 0,$$

so erhält man die folgenden Beziehungen für die reellen Größen u, v^2 und w^2 :

$$(p + 4u^2)^2 - \left(\frac{q}{2u}\right)^2 - 4r = 0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{matrix} v^2 \\ w^2 \end{matrix} \right\} = -\frac{p}{2} - u^2 \mp \frac{q}{4u}. \quad (5)$$

¹⁾ Universität Basel.

²⁾ Z. angew. Math. Mech. 29, 58–61 (1949). Auf einem anderen Gedanken beruhen die Netztafeln, welche von FRITZ EMDE, *Tafeln elementarer Funktionen* (Verlag Teubner, 1940), speziell S. 48–72, veröffentlicht wurden.

Um die unbekannte Zahl u aus (4) mit Hilfe einer Netztafel bestimmen zu können, war H. BLENK veranlaßt, durch eine weitere Transformation den Koeffizienten q in (2) zu 1 zu machen. Wir schlagen nun an Stelle einer Netz- eine *Fluchtlinientafel* vor, die bekanntlich unter günstigen Verhältnissen einen Freiheitsgrad mehr besitzt und bedeutend weniger Zeichenarbeit erfordert¹⁾.

Wir konstruieren für die Gleichung (4) mit festem p eine Fluchtlinientafel mit einem krummlinigen und zwei geraden, parallelen Skalenträgern. Zu diesem Zweck betten wir das Nomogramm in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein (siehe Figur 1). Die Einheiten auf der x - und auf der y -Achse können unabhängig

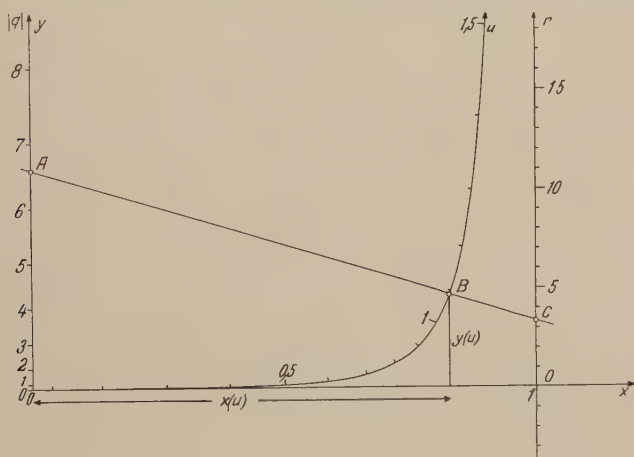


Fig. 1

Konstruktion der Fluchtlinientafel ($p = 0$).

voneinander gewählt werden. Eine erste Skala, die q -Skala, legen wir in die y -Achse, eine zweite, die r -Skala, in die Gerade $x = 1$. In beiden Fällen müssen q und r mit Hilfe noch zu bestimmender Funktionen auf y bezogen werden, weshalb wir etwa $y = f(q)$ und $y = g(r)$ setzen. Für jeden Wert von p denken wir uns einen krummlinigen Skalenträger $x = x(u)$, $y = y(u)$ für die gesuchte Unbekannte u entworfen (zum Beispiel für $p = 0$ in Figur 1). Damit nun die Bildpunkte A , B , C dreier zusammengehöriger Werte von q , r , u auf ein und derselben Geraden liegen, haben die Koordinaten bekanntlich die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 0 & f(q) & 1 \\ x(u) & y(u) & 1 \\ 1 & g(r) & 1 \end{vmatrix} = -x(u) [f(q) - g(r)] - y(u) + f(q) = 0 \quad (6)$$

zu erfüllen. Ein Vergleich von (6) mit (4) liefert uns ohne Mühe die für die Zeichnung notwendigen Funktionen

$$x(u) = \frac{4u^2}{4u^2 + 1}, \quad y(u) = \frac{4u^2(p + 4u^2)^2}{4u^2 + 1}, \quad f(q) = q^2, \quad g(r) = 4r. \quad (7)$$

¹⁾ Wegen einer allgemeinen Kritik der Netztafeln vergleiche zum Beispiel den Artikel von K. MADER über Nomographie im *Handbuch der Physik*, Bd. 3, S. 564–598, speziell S. 581.

Der Koeffizient p erscheint nur in $v(u)$, so daß für die zu zeichnenden krummlinigen Skalenträger bei gleichem Wert von u jeweils dieselbe Abszisse vorhanden ist. In Figur 2 ist das so entstehende Nomogramm für die drei Werte $p = 10$, $p = 0$ und $p = -10$ maßgetreu wiedergegeben.

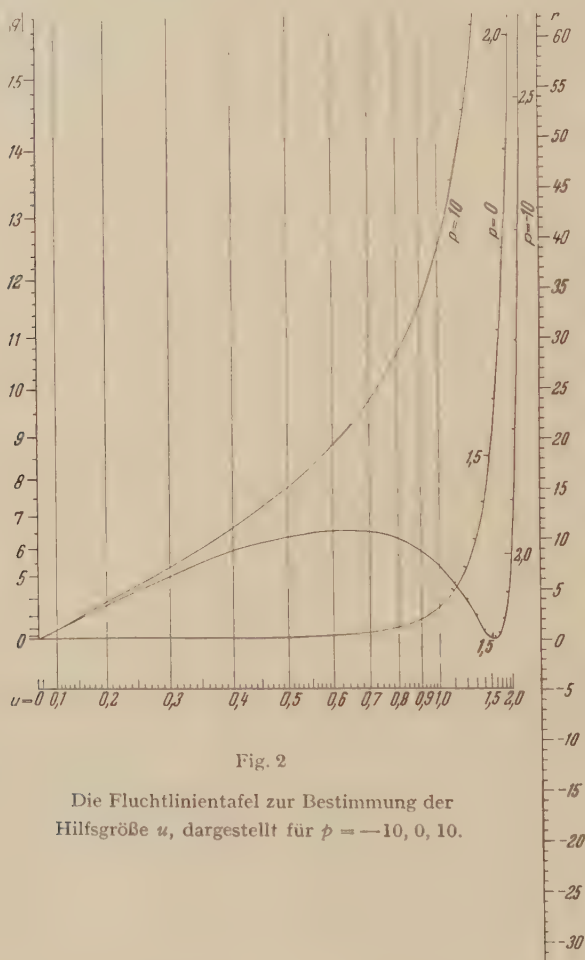


Fig. 2

Die Fluchtlinientafel zur Bestimmung der Hilfsgröße u , dargestellt für $p = -10, 0, 10$.

Bei der praktischen Verwendung des Nomogramms brauchen außer den in Figur 2 eingetragenen Kurven nicht unbedingt weitere Kurven $p = \text{const}$ gezeichnet zu werden. Denn mit Hilfe einer Transformation $z' = m z''$ mit reellem m läßt sich der Koeffizient p ohne weiteres zu einem der Werte 10, 0, -10 machen. $z' = m z''$ führt zu einer bloßen Maßstabänderung der komplexen Zahlenebene.

Nach der Bestimmung von u können v und w aus (5) berechnet werden. Aus (3) folgen dann unmittelbar die vier Wurzeln.

Für gewisse Werte von q und r wird die Gerade, die in Figur 2 zum Ablesen von u dient, die Kurve $p = \text{const}$ in drei verschiedenen Punkten schneiden. Dies entspricht dem Fall von vier reellen Wurzeln. Denn hier kann man die Wurzeln auf drei verschiedene Arten zu Paaren zusammenfassen.

In ähnlicher Weise kann man auch ein Nomogramm zur Bestimmung der reellen und der komplexen Wurzeln der vollständigen kubischen Gleichung $z^3 + a z^2 + b z + c = 0$ entwerfen.

Beispiel

$$z^4 - 10 z^3 + 19 z^2 - 56,7 = 0.$$

Durch die Transformation $z = z' + 2,5$ bringen wir die Gleichung auf die Normalform

$$z'^4 - 18,5 z'^2 - 30 z' - 55,1 = 0$$

und durch die weitere Transformation $z' = \sqrt[3]{1,85} z''$ in die Gestalt

$$z''^4 - 10 z''^2 - 11,9 z'' - 16,1 = 0$$

mit $p = -10$, $q = -11,9$, $r = -16,1$. Der Figur 2 entnehmen wir für u den Wert 0,493 und erhalten aus (5) und (3) durch Rechnung die Wurzeln

$$z''_1 = 3,77, \quad z''_2 = -2,79, \quad z''_3 = -0,493 + 1,14 i, \quad z''_4 = -0,493 - 1,14 i.$$

Transformieren wir schließlich rückwärts, so gewinnen wir für die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung die Näherungswerte

$$z_1 = 7,64, \quad z_2 = -1,30, \quad z_3 = 1,83 + 1,55 i, \quad z_4 = 1,83 - 1,55 i.$$

Summary

To find approximate values for the real and complex roots of a fourth order equation, H. BLENK suggested to determine the auxiliary values u , v , w from (4) and (5). He published a network chart to solve the equation (4). In this paper we propose an *alignment diagram* instead of a network chart. This procedure allows a higher degree of freedom without additional work. The same method may be used for third order equations.

(Eingegangen: 25. 10. 1951.)

Union internationale de Physique pure et appliquée

L'Union internationale de Physique pure et appliquée étudie actuellement un projet de colloque sur «Les ondes courtes» (ordre de grandeur de 10^{-1} à 10 cm) dans leurs relations avec l'optique qui serait organisé en juin ou septembre 1952 dans une ville du nord de l'Italie. Cette réunion aurait lieu sous le patronage de l'Union internationale de Physique; la Société de Physique italienne, sous la présidence de M. le professeur E. PERUCCA (Politecnico di Torino) ou d'une autre personnalité italienne, prendrait soin de l'organisation.

Tenant compte des suggestions reçues, les sujets considérés seraient les suivants (chacun d'eux étant traité essentiellement au point de vue d'une comparaison et d'une aide mutuelle entre la physique des ondes courtes et l'optique):

- 1° Questions théoriques et résultats expérimentaux (propagation, diffraction – interprétations quantiques et électromagnétiques, etc.);
- 2° Appareillages et méthodes expérimentales: guides d'ondes, dispositifs spectroscopiques (en se limitant aux travaux postérieurs au Colloque tenu en 1950 à Amsterdam), etc.;
- 3° Applications: examen à grande échelle de certains phénomènes concernant l'optique physique et l'optique physiologique; météorologie (temps, longueurs, vitesse de la lumière), etc.

Les intéressés sont priés d'adresser leurs demandes d'information ainsi que des inscriptions éventuelles de communications comprenant titre et durée maximum à *chacune* des deux adresses indiquées ci-après: E. PERUCCA, Directeur de l'Institut de Physique expérimentale du «Politecnico», Torino, Italie; et P. FLEURY, Secrétaire général de l'Union internationale de Physique, 3, boulevard Pasteur, Paris XV^e, France.

H. KÖNIG

International Symposium on the Reactivity of Solids

Diese Tagung findet vom 9. bis 13. Juni 1952 in Gothenburg (Schweden) unter dem Patronat der Royal Swedish Academy of Engineering Sciences statt.

Diesbezügliche Anfragen und Anmeldungen sind zu richten an Ingeniörs Vetenskaps Akademien, Box 5073, Stockholm 5, Schweden.

P. NIGGLI

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

«**Acustica**», Internationale akustische Zeitschrift (S.-Hirzel-Verlag, Zürich 1951). Jahresabonnement sFr. 36.–, Einzelheft sFr. 6.50.

Soeben ist die erste Nummer einer neuen wissenschaftlichen Zeitschrift, «Acustica», erschienen. An ihrer Herausgabe beteiligen sich drei internationale wissenschaftliche Vereinigungen, nämlich: «Groupement des acousticiens de langue française», «Acoustics group of the Physical Society of London» und «Verband der deutschen physikalischen Gesellschaften». Die drei Gesellschaften stellen je einen Schriftleiter in der Person von Prof. CANAC, Prof. RICHARDSON und Prof. ERWIN MEYER. Dazu gesellt sich Prof. GIACOMINI, Rom, und die Hauptschriftleitung hat Dr. KOSTEN, Delft, übernommen. Es handelt sich also um ein wirklich internationales Gemeinschaftswerk.

Seitdem im Jahre 1942 die «Akustische Zeitschrift» eingegangen war, machte sich besonders nach dem Kriege das Fehlen eines europäischen akustischen Fachorganes stark bemerkbar. Veröffentlichungen aus allen Gebieten der Akustik wanderten entweder an das «Journal of the Acoustical Society of America» ab oder erschienen in allen möglichen wissenschaftlich-technischen Organen, wo sie teilweise nur sehr schwer auffindbar waren. Die neue Zeitschrift «Acustica» füllt daher eine sehr fühlbare Lücke in glücklicher Weise aus, und es besteht kein Zweifel, daß sie sich rasch einer weiten Verbreitung erfreuen wird, wofür auch die hervorragende Zusammensetzung der Schriftleitung bürgt. Zudem ist das

Zustandekommen einer wirklich internationalen Zusammenarbeit immer sehr erfreulich; nicht zuletzt hat dazu der Verband der deutschen physikalischen Gesellschaften beigetragen, indem er auf das bereits eingeleitete Wiedererscheinen der früheren «Akustischen Zeitschrift» zugunsten der «Acustica» verzichtet hat.

Die vorliegende erste Nummer der «Acustica» vermittelt schon ein übersichtliches Bild über die Reichhaltigkeit und Qualität der zu erwartenden Beiträge. CANAC und GAVREAU berichten über die von ihnen entwickelte Technik von Ultraschallmessungen in Luft und ihre Anwendung für Modellversuche. MEYER, PARKIN, OBERST und PURKIS veröffentlichen die Resultate einer englisch-deutschen Zusammenarbeit auf dem Gebiete der raumakustischen Meßmethoden; durch die Anwendung des Reziprozitätsgesetzes ist es erstmals gelungen, bei der Schallübertragung durch eine Trennwand die Anteile von Luft und Körperschall genau zu trennen. FOKKER bringt eine theoretische Betrachtung aus der musikalischen Grammatik über Tonleitern, und FISCHER untersucht die Abstrahlung von Impulsen durch eine Kolbenmembran. Den Schluß dieses ersten Heftes bildet eine Veröffentlichung von SOMERVILLE und WARD aus dem Laboratorium der "British Broadcasting Corporation" über Modellmessungen an akustischen Diffusoren in Räumen.

Um der in den letzten Jahren erfolgten Anhäufung des Stoffes Rechnung zu tragen, ist die Herausgabe mehrerer Beihefte zu der sonst sechsmal pro Jahr erscheinenden Zeitschrift vorgesehen. Die Aufsätze erscheinen in französischer, englischer oder deutscher Sprache, wobei jeweils sehr übersichtliche Zusammenfassungen in allen drei Sprachen vorangestellt sind.

Es besteht kein Zweifel, daß diese neue Zeitschrift einem wirklichen Bedürfnis entspricht und daß alle Voraussetzungen für interessante Originalbeiträge aus allen Gebieten der Akustik vorhanden sind, so daß ihr heute schon repräsentativer Charakter zukommt, der ihr weiteste Verbreitung sichern wird. *W. Furrer*

General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions.

By E. A. MAXWELL (Cambridge University Press, Cambridge 1951), 169 pp.; 15s.

Das Buch ist die Fortsetzung des im Jahre 1948 in zweiter Auflage erschienenen Buches *The methods of plane projective geometry, based on the use of general homogeneous coordinates* desselben Verfassers. Es gibt eine kurze, leichtfaßliche Einführung in die (analytische) projektive Geometrie des dreidimensionalen Raumes.

Inhaltsangabe: I. Der Punkt, die Gerade, die Ebene. II. Die Flächen zweiter Ordnung. III. Die Erzeugenden der Flächen zweiter Ordnung. IV. Liniengeometrie. V. Die Raumkurven dritter Ordnung. VI. Systeme von Flächen zweiter Ordnung. VII. Anwendungen auf die euklidische Geometrie. VIII. Anwendungen des Matrizenkalküls.

Eine reiche Aufgabenliste (einfache und schwierigere Aufgaben) folgt jedem Kapitel.

Das Buch kann für Studierende der Mathematik und der Physik des 1. und 2. Semesters nützliche Dienste leisten. *M. Plancherel*

Theorie der Elektrizität. Von R. BECKER (Verlagsgesellschaft B. G. Teubner, Leipzig 1949). Band 1: *Einführung in die Maxwellsche Theorie*, 240 S., 59 Abb.; \$4.10; Band 2: *Elektronentheorie*, 336 S., 80 Abb.; \$4.60.

Die neuesten Auflagen der zweibändigen *Theorie der Elektrizität* unterscheiden sich von den vorhergehenden praktisch nicht. Es wäre in der Tat auch schwer, irgendwelche Vorschläge für Verbesserungen an diesem Standardwerk anzubrin-

gen, welches sich seit Jahren für das Studium der Elektrodynamik und der Grundlagen der Elektronentheorie so vorzüglich bewährt hat. Gewiß wird mancher Leser bedauern, daß die moderne Entwicklung der Theorie des Elektrons im Sinne der Quantenmechanik nicht zur Darstellung kommt. Diesem Wunsche könnte jedoch nur durch eine ganz erhebliche Vergrößerung des Umfanges nachgekommen werden, worauf der Autor bewußt verzichtet hat. Es spricht für den Wert des bestehenden Werkes, daß es durch diese Einschränkung an Bedeutung nicht verliert.

Rein äußerlich sind die beiden Bände leider mit einem Schönheitsfehler behaftet: Das Papier ist von recht mäßiger Qualität und zeigt zahlreiche Defekte, die den Satz oft in unangenehmer Weise stören. Man hätte dem wertvollen Text wahrlich einen besseren Träger gewünscht.

G. Busch

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band: *Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen.* Von A. OSTROWSKI (Verlag Birkhäuser, Basel 1951). 482 S., sFr. 69.70.

Nach fünf Jahren konnte nun die Fortsetzung des in der Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften» herausgegebenen ersten Bandes der *Vorlesungen über Infinitesimalrechnung* erscheinen. Sie erfolgt aus stofflichen und pädagogischen Rücksichten in zwei Bänden, von denen der vorliegende zweite Band des Gesamtwerkes die Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Variablen sowie notwendige Ergänzungen des ersten Bandes behandelt.

Nach einem Ausbau der Grundlagen durch eine vertiefte Diskussion des Unendlichen in je einem Kapitel über Mengenlehre und über Konvergenz und Stetigkeit von Funktionen auf Punktmengen folgt eine eingehende Darstellung der unendlichen Reihen mit konstanten und variablen Gliedern und den Potenzreihen im besondern sowie der Ergänzungen zur Differentialrechnung, vor allem bei mehreren Variablen. Die Anwendungen beziehen sich zunächst auf die Analysis, wo die so wichtigen Existenzsätze für implizite Funktionen bewiesen und die Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Funktionssystemen eingehend diskutiert werden. Ein Kapitel über numerische Rechenmethoden bringt Anwendungen auf Interpolation erster und höherer Ordnung (LAGRANGE und NEWTON), numerische Differentiation und Integration und genäherte Auflösung von Gleichungen, wobei jeweils auf Fehlerabschätzungen besonderes Gewicht gelegt wird. Die beiden verbleibenden Kapitel sind einer Einführung in die Differentialgeometrie gewidmet.

Besonders zu erwähnen ist die überaus reiche Sammlung von Aufgaben – es sind insgesamt 1560 ganz neuartig gestellte Aufgaben –, die stoffgemäß auf die verschiedenen Paragraphen verteilt sind.

Originalität und wissenschaftliche Sauberkeit, pädagogisches Geschick und Kunst der Darstellung werden für längere Zeit auch diesem zweiten Band einen ersten Platz sichern.

A. Pfluger

Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces. By R. COURANT (Interscience Publishers, New York 1950). 344 pp., \$4.50.

Es sind nun bald hundert Jahre her, seitdem RIEMANN das Dirichletsche Prinzip zur Begründung seiner Theorie der Abelschen Integrale benützt, und genau fünfzig Jahre, seitdem HILBERT dieses Prinzip auf eine sichere Basis gestellt hat. Stets erwies es sich als eine kraftvolle Methode, und seine Verwendbarkeit ist besonders von COURANT (es war immer einer seiner Lieblinge) wesentlich ausgebaut und vereinfacht worden.

Das vorliegende Buch gibt eine moderne Darstellung des Dirichletschen Prinzips und seiner wichtigsten Anwendungen auf dem Gebiet der konformen Abbildung und der Minimalflächen. Die sehr klaren und ausführlichen Beweise, unterstützt durch physikalische Motivierungen und Interpretationen, machen die Lektüre dieses Buches zu einem wirklichen Genuß. Aus dem Inhalt: I. Lösung des Randwertproblems für ebene Gebiete mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips. II. Beweis des Parallelschlitztheorems, Uniformisierung schlichtartiger Riemannscher Flächen sowie solcher höhern Geschlechts. III. Lösung des Plateauschen Problems für einfach zusammenhängende Flächen nach der vom Verfasser entwickelten Methode. IV. Verallgemeinerung auf Flächen höherer topologischer Struktur: Durch gegebene endlich viele Jordan-Kurven in einem m -dimensionalen Raum ist eine Minimalfläche von vorgeschriebenem Orientierbarkeitscharakter und Eulerscher Charakteristik zu konstruieren. Beim Lösbarkeitskriterium spielen die Vergleichsflächen mit niedrigerer topologischer Struktur eine wesentliche Rolle. V. Im zweidimensionalen Falle liefert obige Methode die Existenz konformer Abbildungen auf gewisse Normalgebiete. VI. Diskussion besonderer Probleme, wie freier Ränder und unstabiler Minimalflächen.

Das Buch enthält einen von M. SCHIFFER verfaßten Anhang über einige neuere Entwicklungen in der Theorie der konformen Abbildung. Es werden die Anwendungen der Bergmanschen Kernfunktion auf konforme Abbildung, die von SCHIFFER mit Erfolg wieder aufgegriffene Hadamardsche Variationsmethode sowie die Methode der Extremallänge zur Lösung von Extremalproblemen dargestellt.

A. Pfluger

Elektrische Maschinen. Band I: *Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschine.* Von R. RICHTER. (Verlag Birkhäuser, Basel 1951). 630 S., 453 Abb.; sFr. 49.40.

Von dem 1924 im Verlag Springer als erste Auflage erschienenen Buche von RICHTER *Elektrische Maschinen*, 1. Band, ist nun die zweite Auflage als photo-mechanischer Neudruck im Basler Verlag Birkhäuser neu herausgekommen. Mit Genugtuung darf festgestellt werden, daß Druck und Bild der früheren Auflage gleichwertig sind. Die notwendigen Ergänzungen sind eingangs des Buches als Ergänzungen und Berichtigungen kurz zusammengestellt; sie enthalten im besonderen einige wertvolle Hinweise auf neuere Literatur im Gebiete der Erwärmungsprobleme.

Der in drei Teile gegliederte Inhalt des Buches umfaßt im ersten Abschnitt die Grundbegriffe und Gesetze der Elektrotechnik, soweit sie irgendwie für die elektrischen Maschinen jeder Art von Belang sind.

Der zweite Abschnitt führt in die allgemeinen Eigenschaften und Kriterien der elektrischen Maschine ein. Zu erwähnen sind dabei die kurze, aber für normale Ansprüche ausreichende Übersicht über die Wicklungen für Gleich- und Wechselstrom; ferner die Berechnungsgrundlagen des magnetischen Kreises. Sehr ausführlich behandelt ist in diesem Abschnitt das Erwärmungsproblem der elektrischen Maschine; nach exakter Bestimmung aller auftretenden Verluste sind wertvolle Angaben über die Wärmeabgabe und die Lüftung angeschlossen. Hier finden sich auch, allerdings in etwas fremder Umgebung, die grundlegenden Überlegungen und Berechnungsangaben über die verschiedenen Streuinduktivitäten.

Erst der dritte Abschnitt befaßt sich speziell mit der Gleichstrommaschine, von der die theoretischen und rechnerischen Grundlagen, eingeschlossen die Kommutation, ausführlich behandelt sind. Die Angaben über die konstruktiven Fra-

gen dürften in einem zweiten Bande folgen; einige Schnittbilder geben dem Leser immerhin einen gewissen Einblick in die konstruktive Seite der Gleichstrommaschine.

Das Buch verdient durch seine Klarheit und Vollständigkeit höchstes Lob; es darf wohl als das Standardwerk über die Gleichstrommaschine bezeichnet werden. Für Studierende bildet es eine gediegene Grundlage für das Verständnis der elektrischen Maschine; für den Praktiker ist es infolge seiner Gründlichkeit ein willkommenes Nachschlagewerk. Sein Studium wird allen, die mit der Gleichstrommaschine in Berührung kommen, größten Gewinn bringen.

E. Dünner

Superfluids, Volume 1: *Macroscopic Theory of Superconductivity*. By F. LONDON (John Wiley and Sons, New York 1950). 161 pp., \$5.00.

The book under review is the first of a projected series entitled "Superfluids" which is to deal with the phenomenon of resistanceless flow exhibited by superconductors and by liquid helium II. This volume is not a general textbook on superconductivity in all its experimental and theoretical aspects. It is rather an up-to-date account of the phenomenological theory of superconductivity proposed by F. and H. LONDON.

In an introductory chapter the concept of a superfluid is discussed and the ability of a portion of the particles present (electrons or atoms) to withdraw from the disorder of thermal agitation is attributed to a quantum mechanism of macro-molecular size. After a general discussion of superconductors and liquid helium II from this point of view LONDON makes the fascinating suggestion that such macroscopic quantum mechanisms may help us to understand the macromolecular systems of biophysics which behave in many respects much more simply than would be expected in view of the apparent great complexity of their structure.

The ideal superconductor is then defined and the thermodynamics of the transition from the normal to the superconducting state discussed. The basic assumption of the London theory is that the supercurrent is related to the magnetic field present in contrast to the normal current which is governed by the electric field. The consequences of this hypothesis are developed and it is shown to be capable of explaining the Meissner effect, the perfect diamagnetism of macroscopic superconductors. Then follow discussions of the intermediate state, when the body is passing from the purely superconductive to the normal state, and of the phenomena exhibited by superconductors of small dimensions.

The book closes with a chapter describing Professor LONDON's views on what a quantum mechanical theory of superconductivity must achieve and the suggestions which the macroscopic theory can make as to the line to be taken.

The appearance of the book is particularly opportune as it is of great value to have an authoritative account of the achievements and limitations of the macroscopic theory at a time when there are signs that, as a result of the work of FRÖHLICH and of BARDEEN, a satisfactory molecular theory of superconductivity may soon be developed. Professor LONDON's book may be heartily recommended to all who are interested in the present state of theory regarding the fascinating transfer mechanisms classified under the heading of «Superfluids» and the remaining volumes of the series will be eagerly awaited.

L. C. Jackson

Neuerscheinungen

Theoretische Elektrotechnik

Band III: *Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen*. Von Dr. Ing. KARL KUHLMANN, em. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften, Band 13.) 546 Seiten mit 328 Abbildungen. In Ganzleinen Fr. 74.90.

Elektrische Maschinen

Band I: *Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschinen*. Von Dr. RUDOLF RICHTER, em. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, vorm. Direktor des Elektrotechnischen Instituts.

Zweite, verbesserte Auflage 1951. 642 Seiten mit 453 Textabbildungen. In Ganzleinen Fr. 48.-.

Elemente der Philosophie und der Mathematik

Eine Anleitung zum inhaltlichen Denken. Von Dr. ANDREAS SPEISER, Professor an der Universität Basel. (Wissenschaft und Kultur, Band 6.) 116 Seiten. In Ganzleinen Fr. 11.45.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL

Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der ETH., Nr. 1 und 2

Dr. A. P. SPEISER, ETH., Zürich

Entwurf eines elektronischen Rechengerätes

Unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. – 70 Seiten mit 3 Figuren. Kartonierte Fr. 6.75 (1950).

Das Buch ist aus dem Bedürfnis heraus entstanden, einen programmgesteuerten Rechenautomaten für die Verwendung in einem kleinen bis mittleren mathematischen Institut zu schaffen.

Dr. H. RUTISHAUSER, Dr. A. P. SPEISER, Prof. Dr. E. STIEFEL, ETH., Zürich

Programmgesteuerte digitale Rechengeräte

102 Seiten mit 28 Figuren. Kartonierte Fr. 8.85 (1951). – Inhalt: *Grundlagen und wissenschaftliche Bedeutung – Organisation und Arbeitsweise – Arithmetische Prinzipien – Vorbereitung von Rechenplänen – Physikalische Grundlagen.*

Damit wird endlich eine empfindliche Lücke im deutschsprachigen Schrifttum geschlossen, das bisher außer Referaten und Zeitungsnachrichten keine wissenschaftliche Zusammenfassung der Entwicklung von Großrechenautomaten aufzuweisen hatte.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL

Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

Mathematik

- | | |
|--|------------------------|
| BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen, erscheint 1952 | |
| CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie in zwei Bänden | Band I geb. Fr. 39.50 |
| | Band II geb. Fr. 27.05 |
| CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung, erscheint 1952. | |
| DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation geb. Fr. 83.20 | |
| FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen | geb. Fr. 15.40 |
| FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes | geb. Fr. 24.95 |
| HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie | geb. Fr. 17.— |
| HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände | geb. je Fr. 54.10 |
| LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951 | geb. Fr. 31.20 |
| LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung | geb. Fr. 49.90 |
| LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven | geb. Fr. 12.50 |
| OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I | geb. Fr. 56.15 |
| | Band II geb. Fr. 69.70 |
| SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I | geb. Fr. 56.15 |
| STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie | geb. Fr. 29.65 |
| VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf. | geb. Fr. 47.85 |
| ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik | geb. Fr. 31.20 |

Physik und Astronomie

- | | |
|--|----------------|
| GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik | geb. Fr. 33.30 |
| NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung | geb. Fr. 36.40 |
| VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen | geb. Fr. 39.50 |
| WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik | geb. Fr. 49.40 |
| WALDMEIER, M.: Tabellen zur heliographischen Ortsbestimmung | geb. Fr. 14.55 |
| WALDMEIER, M.: Die Sonnenkorona, Band I | geb. Fr. 29.75 |
| Kongreßbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische Physik, Basel 1949. 248 S. mit vielen Illustrationen. Broschiert | Fr. 16.65 |

Ingenieurwissenschaften

- | | |
|--|----------------|
| BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert | Fr. 28.10 |
| GOLDSTEIN, J.: Die Meßwandler, erscheint 1952. | |
| JAEGER, CH.: Technische Hydraulik | geb. Fr. 52.— |
| KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der Wechselströme und des einphasigen Transformators | geb. Fr. 27.55 |
| Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen | geb. Fr. 74.90 |
| MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper | geb. Fr. 37.45 |
| Band II: Dynamik der starren Körper | geb. Fr. 33.80 |
| Band III: Dynamik der Systeme | geb. Fr. 46.80 |
| MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene | geb. Fr. 13.50 |
| SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie | geb. Fr. 15.10 |
| SRÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I | geb. Fr. 40.05 |
| RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge | geb. Fr. 31.20 |
| RICHTER, R.: Elektrische Maschinen, Band I | geb. Fr. 49.40 |

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

Eliches
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G

BASEL / ZÜRICH

LED IN STACKS